

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 36 (1937)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES PROPRIETIES INFINITÉSIMALES DES ENSEMBLES FERMÉS ET LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT  
**Autor:** Kaufmann, B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28024>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 24.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

qui soit celle de l'un des vecteurs de ce point: ce serait le premier pas fait en vue de conférer à  $\mathcal{V}$  une microstructure affine et d'apprendre à y définir, en chaque point d'accumulation, le ptg. d'un ensemble ponctuel, ou ce qui peut être plus commode, le ptg. mixte de deux ensembles ponctuels ayant un point d'accumulation commun<sup>35</sup>. Pour être utile, une telle théorie devrait aboutir à l'existence de systèmes réguliers de coordonnées curvilignes dans la variété, systèmes dont la représentation analytique rencontrée au n° 18 admet *a priori* l'existence.

Ces indications suggèrent l'importance de tout ce qui reste à faire en pareille matière. Et cependant avons-nous ici laissé de côté bien des questions essentielles, telles les relations de la théorie des surfaces avec la théorie de la mesure, relations dont l'importance apparaît de plus en plus nette<sup>36</sup>.

---

## SUR LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DES ENSEMBLES FERMÉS ET LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT<sup>1</sup>

PAR

B. KAUFMANN (Leeds).

---

### I. — PROPRIÉTÉS LOCALES D'ORIGINE INTÉGRALE.

1. — Essayons de donner les caractéristiques de la topologie générale. Etant donné ce que cette science représente aujourd'hui on serait porté à considérer comme son problème principal l'examen par les méthodes de la topologie combinatoire des espaces les plus généraux et en particulier des ensembles fermés.

---

<sup>35</sup> On devrait respecter la condition d'après laquelle le ptg. mixte de  $E$  et de  $F_1 + F_2$  est la réunion des ptg. mixtes de  $E, F_1$  d'une part, et de  $E, F_2$  d'autre part.

<sup>36</sup> Voir sur ce point la thèse de M. Georges DURAND (Paris, 1931, ou *Journ. de Math.*, 9<sup>me</sup> série, t. XI, 1931) et l'important mémoire déjà cité de MM. H. BUSEMANN et W. FELLER (*Acta Math.*, t. 66, paragraphes 4, 5, 6). — Pour l'élimination des espaces usuels, voir PAUC, *Bull. Ac. Sc. Belg.*, août 1936.

<sup>1</sup> Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

En effet, ces dernières années la topologie générale s'est très sensiblement rapprochée de la topologie combinatoire. Cependant, une différence importante subsiste entre ces deux disciplines très liées et c'est une différence de principe. On peut facilement la réduire à un seul fait.

La topologie combinatoire construit ses objets d'après certaines règles d'incidence à partir d'un nombre fini ou dénombrable d'éléments que l'on appelle des simplexes ou des cellules. Pour la plupart des problèmes il est indifférent si ces éléments sont géométriquement définis ou conçus d'une manière abstraite comme des schémas combinatoires. En tous cas cette construction fournit d'une manière univoque : les relations d'incidence ou de frontière, les possibilités de subdivisions successives ou de triangulations des configurations en d'autres équivalentes (ou homologues), etc.

La situation dans la topologie générale est tout à fait différente. Les ensembles fermés ne sont d'abord que des assemblages amorphes et essentiellement continus de points ; il n'y a point d'éléments du genre des simplexes à l'exception de ceux à 0 dimensions, à savoir des points. Par conséquent il n'existe pas de subdivisions simples, de relations d'incidence, etc. Les subdivisions usuelles fournissent des éléments qui eux-mêmes n'ont pas de forme non plus, moins encore que l'ensemble lui-même. Cette différence fondamentale quoique évidente est décisive pour la mise en problèmes de la topologie générale, elle explique même son développement actuel.

Il est bien connu que la possibilité d'une application des méthodes combinatoires subsiste malgré cela. Elle se base sur l'idée d'approximations. On part des subdivisions suffisamment fines d'un ensemble  $F$ , subdivisions qui découlent des théorèmes de recouvrement, ou encore d'un réseau fini (ou dénombrable) de points (simplexes 0-dimensionnels) distribués régulièrement sur  $F$  ; une seule règle, à savoir celle qui affirme que  $r + 1$  éléments ayant un point commun <sup>1</sup> déterminent un simplexe à  $r$  dimensions, permet de construire les complexes d'approxima-

---

<sup>1</sup> Dans le cas d'un réseau ponctuel c'est un réseau partiel formé de  $r + 1$  points et dont l'enveloppe convexe a un diamètre donné, qui détermine un simplexe  $r$ -dimensionnel.

tion (les nerfs). Les subdivisions successives de l'ensemble  $F$  donnent une suite de complexes d'approximation. Alors, une approximation suffisamment poussée permet de déceler la parenté entre les complexes et l'ensemble lui-même. Le succès de ces méthodes est bien connu. Elles ont permis de définir pour les ensembles fermés les relations d'homologie, les ordres de connexion et les nombres de Betti pour un nombre arbitraire de dimensions, de généraliser les relations d'intersection et d'enlacement, d'établir et de démontrer les théorèmes correspondants de dualité et, enfin, d'obtenir plusieurs propriétés nouvelles des ensembles les plus généraux.

2. — J'ai voulu rappeler le développement de la topologie des ensembles fermés pour souligner quelques-uns de ses caractères auxquels on ne pense pas souvent.

L'un de ces caractères est *l'existence de nombreux problèmes qui ne peuvent pas se présenter en topologie combinatoire* et qui dans le cadre de cette dernière deviennent des énoncés évidents et triviaux *bien qu'ils découlent en topologie des ensembles de théorèmes combinatoires de toute importance.*

Ces problèmes spécifiques à la topologie générale peuvent être très intéressants et très profonds sans avoir de pendant dans la topologie cellulaire. Le problème de la dimension en est un exemple. Représentons-nous, par exemple, les énoncés suivants pour le complexe  $r$ -dimensionnel  $K^r$  :  $K^r$  contient un cycle  $(r - 1)$ -dimensionnel homologue à 0,  $K^r$  est un « obstacle d'homologie » à  $r$  dimensions,  $K^r$  contient une multiplicité de Cantor à  $r$  dimensions, etc. A tous ces énoncés qui sont bien triviaux dans le cadre de la topologie cellulaire correspondent des résultats importants et intéressants dans la topologie générale. Songeons seulement que ces résultats découlent des théorèmes de dualité ou peuvent être ramenés à eux.

Une autre propriété remarquable de la topologie générale se rapporte à son développement et se manifeste par la *prépondérance de résultats globaux*. Les complexes d'approximation permettent d'appliquer les invariants combinatoires à l'ensemble et puisque ces invariants sont des propriétés globales pour les complexes, ils le sont à plus forte raison pour les ensembles.

La parenté mentionnée ci-dessus entre les ensembles et les complexes d'approximation est une parenté globale. Même les transformations d'un ensemble  $F$  à  $r$  dimensions en un complexe  $K^r$  à  $r$  dimensions — d'après le théorème de transition de M. ALEXANDROFF — transformations qui sont certainement des processus localement définis, expriment uniquement une parenté globale. *Généralement l'approximation ne confère pas les propriétés locales des complexes à l'ensemble.*

3. — Pour cette raison il semble désirable de distinguer nettement entre elles les propriétés locales d'un ensemble  $F$  donné dans un espace  $R$ .  $P$  étant un point de  $F$  il est d'usage d'appeler *local* un énoncé ou une propriété  $E$  de  $F$  se rapportant à un voisinage  $U$  de  $P$  dans l'espace  $R$ . Si le même énoncé  $E$  se rapporte à un voisinage arbitrairement petit du point  $P$ , on pourrait l'appeler une propriété *infinitésimale* de  $F$ . Mais d'avoir formé ces notions ne permet pas encore d'obtenir les caractères distinctifs des propriétés locales d'un ensemble. Je crois cependant qu'il existe deux types essentiellement différents de ces propriétés.

Nous voulons ici nous restreindre aux énoncés qui sont des théorèmes, c'est-à-dire à des énoncés qui se démontrent.

Soit  $(B)$  un système d'hypothèses dont, par une démonstration, découle un énoncé ou une propriété  $E$ ; désignons la démonstration par  $(B) \rightarrow E(F)$ .

*U étant un voisinage dans  $R$  d'un point  $P$  de  $F$ , nous appellerons<sup>1</sup>  $E(U)$  une propriété locale ordinaire de  $F$  si sa démonstration  $(B) \rightarrow E(F)$  ne contient pas non plus d'hypothèses essentielles dans  $R - \bar{U}$ . Si un même énoncé  $E(U_n)$  reste vrai pour une suite  $(U_n)$  de voisinages convergeant en un point  $P$  de  $F$  et si la démonstration  $(B) \rightarrow E(U_n)$  reste pour chaque  $n$  intérieure à  $U_n$ , alors nous parlerons d'une propriété infinitésimale ordinaire de  $F$  relatif à  $P$ .*

Dans les cas suivants cependant on se trouve en présence de faits tout à fait différents.

<sup>1</sup> Si un énoncé ou une propriété  $E$  se rapporte à un ensemble  $F$  nous écrivons aussi brièvement  $E(F)$ . Si  $U$  est un voisinage dans l'espace  $R$ ,  $E(U)$  désigne que l'énoncé  $E(F)$  contient au moins un énoncé essentiel pour  $U$ .

Si la démonstration  $(B) \rightarrow E(U)$  nécessite des hypothèses essentielles dans  $R - \bar{U}$  et en particulier si elle doit se servir essentiellement d'endroits intérieurs à  $R - \bar{U}$ , alors nous appellerons  $E(U)$  une propriété locale (de  $F$ ) d'origine intégrale. Et, d'une façon analogue, si  $E(U_n)$  est un énoncé vrai pour un voisinage arbitrairement petit  $U_n$  de  $P$  et s'il existe un voisinage fixe  $U_\delta$  tel que  $(B) \rightarrow E(U_n)$  reste vrai pour chaque  $n$ , des hypothèses essentielles étant données dans  $R - U_\delta$ , alors nous appelons  $E$  une propriété infinitésimale (de  $F$ ) d'origine intégrale.

Les propriétés locales (ou infinitésimales) d'origine intégrale peuvent notamment s'exprimer (totalement ou en partie) par les énoncés dans  $R - \bar{U}$ , malgré qu'elles se rapportent immédiatement<sup>1</sup> à  $U$ . Si c'est le cas, alors nous parlons d'énoncés locaux (ou infinitésimaux) de caractère intégral. Evidemment, ces énoncés peuvent être en même temps envisagés comme des énoncés globaux. L'on constate aisément qu'un énoncé de caractère intégral doit être nécessairement d'origine intégrale (mais pas réciproquement).

Les propriétés locales et notamment les propriétés infinitésimales d'origine intégrale sont caractéristiques pour la topologie des ensembles fermés. Mais on voit immédiatement qu'il s'agit seulement d'une formation relative des notions. La distinction entre les propriétés ordinaires ou d'origine intégrale dépend non seulement d'un certain système  $(B)$  d'hypothèses, mais aussi des démonstrations elles-mêmes<sup>2</sup>. Je crois cependant qu'il est un principe de travail utile et de grande actualité de former ces notions malgré qu'elles ne requièrent pas, au moins sous cette forme, de rigueur mathématique ou même philosophique.

4. — Je voudrais encore compléter ces considérations sur les propriétés locales et infinitésimales des ensembles fermés en soulignant les deux (ou trois) attitudes qu'on peut prendre

<sup>1</sup> La définition de propriété locale n'exclue point que l'énoncé  $E(U)$  contienne en même temps des énoncés dans  $R - \bar{U}$ . Cela n'est exclu que pour le cas des propriétés locales ordinaires. Considérons par exemple l'énoncé suivant: «  $(B)$  entraîne que tous les couples de points dans  $U$  peuvent être reliés par un arc dans  $F$  tel qu'il rencontre des points dans  $R - \bar{U}$  ».

<sup>2</sup> Seuls les énoncés de caractère intégral sont indépendants des démonstrations.

vis-à-vis d'elles, attitudes entraînées par les problèmes eux-mêmes.

L'une de ces attitudes est déterminée par le désir de caractériser entre les ensembles et les espaces les plus généraux ceux qui présentent les propriétés déjà connues des formations cellulaires (des multiplicités, des espaces de Poincaré, des sphères). Ces problèmes sont aussi très importants pour la topologie combinatoire puisqu'ils permettent d'étendre son domaine de validité. La résolution de ces problèmes s'obtient en posant des conditions nécessaires et suffisantes de genre généralement local, qui garantissent la possibilité de la structure cellulaire. On a une très grande liberté dans le choix de ces conditions et l'intuition est d'un grand secours. *A priori* au moins, ces conditions peuvent aller des tautologiques jusqu'aux très profondes. Le principe directeur est évidemment le suivant, si l'on envisage un but concret: *moins on pose d'hypothèses, plus la portée des conditions s'étend*. Comme exemple citons le problème de la généralisation de la notion de multiplicité, dont on s'est beaucoup occupé ces dernières années (VAN KAMPEN, PONTRJAGIN, ALEXANDER, LEFSCHETZ) ou encore le problème de caractériser la sphère à  $n$  dimensions. On peut aujourd'hui poser des conditions nécessaires et suffisantes pour l'homéomorphie d'un espace et d'une sphère, mais on pourrait aussi en poser assez peu pour rendre le problème extrêmement difficile, comme c'est le cas avec l'hypothèse de POINCARÉ. Comme problème très relié à ce dernier, mais plus profond encore, citons le problème de la réciproque du théorème Jordan-Brouwer dans les espaces à quatre ou plus dimensions (à savoir de caractériser la sphère par les propriétés de l'espace complémentaire).

Une attitude foncièrement différente doit être adoptée si l'on se donne un objet géométrique (aussi général que possible) et si l'on cherche des propriétés nouvelles de cet objet. Si, dans cette attitude, nous définissons la propriété d'une façon *abstraite* ou bien si nous formons de nouvelles notions, le critère est opposé: plus la notion formée, qui exprime des propriétés nouvelles de l'objet, est tranchante, plus sa portée est grande. Dans la topologie des ensembles on trouve tant d'exemples de ce fait qu'il nous semble inutile d'insister. Ce critère oblige aussi

à justifier une notion nouvellement introduite et cela par l'indication de sa signification pour une classe d'objets donnée *indépendamment de cette notion* et aussi générale que possible.

Enfin, je mentionnerai encore une troisième attitude: par des définitions (des axiomes) on peut déterminer une nouvelle classe d'objets satisfaisant aux conditions données. Ensuite on examine d'autres propriétés de l'objet. Pour cette attitude il ne faut pas oublier que le nouvel objet dépend généralement des définitions. Cette attitude est d'usage pour établir une théorie abstraite nouvelle et le développement cohérent de cette théorie doit la justifier. Pratiquement, elle est suggérée par le désir d'étudier les problèmes difficiles d'homéomorphie et d'homotopie au moins dans des conditions plus spéciales et plus faibles. Les trois attitudes sont courantes dans la topologie.

## II. — LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT.

5. — Les pages suivantes seront consacrées à un bref exposé de la théorie infinitésimale des ensembles les plus généraux. Il s'agira sans exception de propriétés d'*origine intégrale* dans le sens du critère énoncé plus haut. Ce sont, d'ailleurs, les résultats d'une suite de recherches que j'avais abordées dans les dernières années et qui, je crois, font connaître pour le moment plusieurs nouvelles relations importantes pour la structure infinitésimale des ensembles. Je voudrais d'ailleurs me restreindre aux questions de principe de ces recherches. La compréhension et la classification de ces principes nous sera facilitée si nous retenons quelques phases du développement de la topologie générale. On peut noter, je crois, trois moments critiques, décisifs pour ce développement.

Le premier moment critique s'est présenté le jour où l'on s'est rendu compte de l'*importance des relations d'enlacement pour la topologie générale*. On avait reconnu notamment que la décomposition d'un espace par un ensemble n'était qu'un cas particulier d'enlacement de l'ensemble avec un cycle de dimension duelle. On sait que cette découverte est due à MM. LEBESGUE



et BROUWER<sup>1</sup>. En topologie combinatoire ce sont les théorèmes de dualité qui relèvent le mieux l'importance de cette découverte. Ce sont les relations d'intersection et notamment les indices de Kronecker dont la théorie complète est due à M. LEFSCHETZ qui forment leur outil le plus important.

En particulier, cette conception a permis d'introduire la notion de la multiplicité générale qui est fondamentale pour l'exposé qui suit.

Soit  $U$  un voisinage sphérique dans  $R^n$ . Un ensemble fermé à  $r$  dimensions  $F$  dans  $U$  est appelé une *multiplicité générale* s'il existe un cycle algébrique  $\Gamma^{n-r-1}$  dans  $U$  irréductiblement enlacé avec  $F$ ; c'est-à-dire  $\Gamma^{n-r-1} \sim 0$  dans  $U - F$  tandis qu'on a  $\Gamma^{n-r-1} \sim 0$  dans  $U - F'$  pour chaque vrai sous-ensemble  $F'$  de  $F$ <sup>2</sup>.

La grande importance de ces multiplicités s'explique par leur valeur universelle. Comme M. ALEXANDROFF a pu le montrer, chaque ensemble fermé à  $r$  dimensions contient une multiplicité générale à  $r$  dimensions<sup>3</sup>.

Un second point de vue qui — au moins pendant quelques années de suite — a fortement influencé la topologie, était le suivant: on conçoit la nature de la dimension d'un ensemble comme un invariant à définir inductivement, l'induction se rapportant à une suite de décompositions d'un ensemble par des ensembles à un nombre inférieur de dimensions. Ce principe aussi est dû à M. BROUWER.

Le troisième pas est fait par la *théorie de l'approximation* que nous avons déjà mentionnée et dont le développement est dû notamment à MM. ALEXANDROFF et LEFSCHETZ.

Le principe que je voudrais indiquer maintenant apparaissait de plus en plus au cours de mes recherches; il s'agit ici d'une *synthèse du principe de l'enlacement et du principe inductif de la séparation*. J'appellerai ce principe le *principe inductif de l'enlacement* et la configuration des cycles et des ensembles à laquelle il donne lieu le *système inductif de l'enlacement*.

<sup>1</sup> Voir L. PONTRJAGIN, *Math. Annalen*, 105 (1931), pp. 166-167.

<sup>2</sup> La notation  $\Gamma^{n-r-1} \sim 0$  désignera désormais l'existence d'un complexe  $K^{n-r} \rightarrow \Gamma^{n-1}$ .

<sup>3</sup> Voir P. ALEXANDROFF, Dimensionstheorie, *Math. Annalen*, 106 (1932), pp. 161-238.

6. — Décrivons tout d'abord deux opérations très simples qui, formellement, s'appliquent à des ensembles aussi bien qu'à des cycles.

Soit, dans  $R^n$ ,  $A^r$  un ensemble fermé à  $r$  dimensions. Nous appelons *décomposition* de  $A^r$  la détermination d'un ensemble  $A^{(r-1)}$  à  $(r - 1)$  dimensions au plus et tel que  $A^r$  puisse être représenté comme somme de deux ensembles fermés  ${}^1A^r$  et  ${}^2A^r$ ,  ${}^1A^r + {}^2A^r = A^{(r-1)}$ , ce que nous écrivons  $A^r = {}^1A^r + A^{(r-1)} + {}^2A^r$ . Nous appelons *extension* d'un ensemble l'opération inverse; un ensemble donné  $A^{(r-1)}$  subit l'extension à un ensemble à  $r$  dimensions si l'on parvient à déterminer deux ensembles  ${}^1A^r$  et  ${}^2A^r$  tels que  ${}^1A^r + A^{(r-1)} + {}^2A^r = A^r$  soit une décomposition de  $A^r$ .

Nous pouvons définir les opérations correspondantes pour les cycles algébriques. Soit  $\Gamma^r$  un cycle algébrique à  $r$  dimensions. La *décomposition* de  $\Gamma^r$  en deux complexes  ${}^1C^r$ ,  ${}^2C^r$  sera déterminée si nous indiquons un cycle  $\Gamma^{r-1}$  à  $r - 1$  dimensions tel que  $\Gamma^r = {}^1C^r + {}^2C^r$ ,  ${}^1C^r \rightarrow \Gamma^{r-1}$ ,  ${}^2C^r \rightarrow \Gamma^{r-1}$ . Etant donné un cycle  $\Gamma^{r-1}$  nous appelons *extension* de  $\Gamma^{r-1}$  la détermination ou la construction de deux complexes  ${}^1C^r$  et  ${}^2C^r$  tels que  ${}^1C^r + {}^2C^r = \Gamma^r$  soit décomposé par  $\Gamma^{r-1}$ .

Soit  $F = B^r$  un ensemble fermé à  $r$  dimensions — dans le sens de M. BROUWER — intérieur à un voisinage sphérique  $U$  borné dans  $R^n$  par une sphère à  $(r - 1)$  dimensions. Soient

$$B^r, B^{r-1}, \dots, B^{r-j}, \dots, B^0,$$

une suite d'ensembles fermés à  $(r - j)$  dimensions ( $j = 0, 1, \dots, r$ ) tels que chaque ensemble  $B^{r-j-1}$  décompose l'ensemble  $B^{r-j}$  en deux sous-ensembles  ${}^1B^{r-j}$  et  ${}^2B^{r-j}$ ,

$$B^{r-j} = {}^1B^{r-j} + B^{r-j-1} + {}^2B^{r-j}.$$

Soit  $\Gamma^{n-r-1}$  un cycle algébrique (mod. 0) à  $(n - r - 1)$  dimensions, satisfaisant à la condition

$$\Gamma^{n-r-1} \not\subset 0 \quad \text{dans} \quad U - B^r$$

et soient

$$\Gamma^{n-r}, \Gamma^{n-r+1}, \dots, \Gamma^{n-r+j}, \dots, \Gamma^{n-r-1}$$

une suite d'extensions du cycle  $\Gamma^{n-r-1}$

$$\Gamma^{n-r+j} = {}^1Q^{n-r+j} + {}^2Q^{n-r+j},$$

où l'on a pour chaque  $j = 0, 1, 2, \dots, r$

$$\begin{aligned} {}^1Q^{n-r+j} &\rightarrow \Gamma^{n-r+j-1} && \text{dans } U - {}^1B^{r-j}, \\ - {}^2Q^{n-r+j} &\rightarrow \Gamma^{n-r+j-1} && \text{dans } U - {}^1B^{r-j}. \end{aligned}$$

Si les suites  $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}_{j=0,1,\dots,r}$  et  $\{B^{r-j}\}_{j=0,1,\dots,r}$  satisfont à ces conditions, nous dirons qu'elles forment un *système inductif d'enlacement* relatif à l'ensemble  $F$ .

Etant donné un système inductif d'enlacement, nous appelons les suites  $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$  une *suite fondamentale de cycles* et la suite  $\{B^{r-j}\}$  une *suite fondamentale d'ensembles* du système d'enlacement en question.

7. — Etant donné un système inductif d'enlacement, on en tire d'abord une extension inductive de l'important théorème Phragmen-Brouwer-Alexandroff. Conformément à l'hypothèse, l'ensemble  $F = B^r$  est un obstacle d'homologie par rapport au cycle  $\Gamma^{n-r-1}$ , c'est-à-dire que l'on a, dans  $U - B^r$ ,  $\Gamma^{n-r-1} \not\sim 0$ . De ce fait le théorème PHRAGMEN-BROUWER généralisé affirme qu'il existe dans  $B^r \text{ rel } S^{n-1}$  un vrai cycle enlacé avec  $\Gamma^{n-r-1}$  (mod.  $m_k$ ) et totalement non homologue dans  $B^r$

$$Z^r = z_1^r, z_2^r, \dots, z_k^r, \dots$$

où l'on a pour chaque  $k$

$$\begin{aligned} z_k^r &= {}^1C_k^r + {}^2C_k^r, \\ {}^1C_k^r &\rightarrow z_k^{r-1}, \quad - {}^2C_k^r \rightarrow z_k^{r-1} \end{aligned}$$

et où

$$Z^{r-1} = z_1^{r-1}, z_2^{r-1}, \dots, z_k^{r-1}, \dots$$

est un cycle dans  $B^{r-1}$  et totalement non homologue 0 dans  $B^{r-1}$ . Le cycle  $Z^r$  peut être supposé de position générale par rapport à  $\Gamma^{n-r-1}$  de façon que les indices de Kronecker (de module variable  $m_k$ ) puissent être déterminés pour chaque  $k$ .

*La généralisation inductive du théorème Brouwer-Alexandroff.*

Soit

$$\{ \Gamma^{n-r+j-1} \}_{j=0,1,\dots,r}, \quad \{ B^{r-j} \}_{j=0,1,\dots,r}$$

un système inductif d'enlacement relatif à F. Nous affirmons que :

1° Il existe une suite de cycles entiers

$$\{ Z^{r-j} = z_1^{r-j}, z_2^{r-j}, \dots, z_r^{r-j}, \dots \}_{j=0,1,\dots,r} \pmod{m_k},$$

telle que, pour chaque  $j$ ,  $Z^{r-j}$  soit un cycle entier dans  $B^{r-j}$ , totalement non homologue 0 dans  $B^{r-j}$ , où

$$z_k^{r-j} = {}^1C_k^{r-j} + {}^2C_k^{r-j},$$

$${}^1C_k^{r-j} \rightarrow z_k^{r-j-1} \quad \text{dans} \quad {}^1B_k^{r-j},$$

$$- {}^2C_k^{r-j} \rightarrow z_k^{r-j-1} \quad \text{dans} \quad {}^2B_k^{r-j};$$

2° On a, pour chaque  $j$ ,  $\Gamma^{n-r+j-1} \sim 0$  dans  $U - B^{r-j}$ .

Ce théorème se démontre aisément par induction; l'on démontre les propriétés 1° et 2° alternativement pour des  $j$  croissants. De la validité de la relation 2° pour  $j = 0$  découle — d'après la définition du système d'enlacement — la validité de 2° pour chaque  $j = 1, 2, \dots, r$ . De ce fait, chaque ensemble  $B^{r-j}$  est un obstacle d'homologie du cycle  $\Gamma^{n-r+j-1}$  étendu  $j$  fois, ce qui explique le nom de « système d'enlacement » pour la configuration formée des suites  $\{ \Gamma^{n-r+j-1} \}$  et  $\{ B^{r-j} \}$ .

En construisant encore les cycles entiers  $\{ Z^{r-j} \}$  qui correspondent univoquement aux ensembles décomposants  $\{ B^{r-j} \}$ , nous obtenons une configuration efficace au point de vue combinatoire. Pour chaque  $j$  elle satisfait aux relations 1° et 2° et, pour préciser, nous la notons dans le tableau suivant. Nous appelons cette configuration un « système combinatoire d'enlacement ».

Soit

$$\Gamma^{n-r-1} \sim 0 \quad \text{dans} \quad U - B^r.$$

Les relations suivantes (mod.  $m_k$ ) sont vraies pour chaque  $j = 0, 1, \dots, r$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^{n-r+j-1} &= {}^1Q^{n-r+j-1} + {}^2Q^{n-r+j-1}, & B^{r-j} &= {}^1B^{r-j} + B^{r-j-1} + {}^2B^{r-j}, \\ {}^1Q^{n-r+j} &\rightarrow \Gamma^{n-r+j-1} & \text{dans} & \quad U - {}^1B^{r-j} \\ - {}^2Q^{n-r+j} &\rightarrow \Gamma^{n-r+j-1} & \text{dans} & \quad U - {}^2B^{r-j}, \\ Z^{r-j} &= \{ z_k^{r-j} = {}^1C_k^{r-j} + {}^2C_k^{r-j} \}_{k=1,2,\dots} & \text{dans} & \quad B^{r-j}, \\ \{ {}^1C_k^{r-j}, - {}^2C_k^{r-j} \rightarrow z_k^{r-j-1} \}_{k=1,2,\dots} & & \text{dans} & \quad {}^1B^{r-j}, {}^2B^{r-j}, \\ \{ \chi({}^1C_k^{r-j}, \Gamma^{n-r+j}) = \chi(- {}^2C_k^{r-j}, \Gamma^{n-r+j}) \neq 0 \}_{k=1,2,\dots} & & & \\ \Gamma^{n-r+j-1} &\not\sim 0 & \text{dans} & \quad U - B^{r-j}. \end{aligned}$$

8. — L'importance du système inductif d'enlacement repose sur le fait suivant: l'on peut, en retenant les suites  $\{B^{r-j}\}$  et  $\{Z^{r-j}\}$ , remplacer la suite fondamentale de cycles  $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$  par une suite fondamentale  $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$  de cycles *arbitrairement petits* qui forme avec les suites  $\{B^{r-j}\}$  et  $\{Z^{r-j}\}$  un système combinatoire d'enlacement équivalent. En d'autres termes<sup>1</sup>:

Pour chaque  $\varepsilon$  arbitrairement petit il existe une suite de cycles  $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$ ,

$$\begin{aligned} \gamma^{n-r+j-1} &= {}^1q^{n-r+j-1} + {}^2q^{n-r+j-1}, \\ {}^1q^{n-r+j} &\rightarrow \gamma^{n-r+j-1} & \text{dans} & \quad U - {}^1B^{r-j}, \\ - {}^2q^{n-r+j} &\rightarrow \gamma^{n-r+j-1} & \text{dans} & \quad U - {}^2B^{r-j}, \\ \delta(\gamma^{n-1}) &< \varepsilon, \end{aligned}$$

qui a les mêmes relations d'intersection et d'enlacement avec les cycles  $Z^{r-j}$  que les cycles  $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ .

Il est essentiel pour la construction des cycles  $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$  de ramener un cycle donné à une « position générale » par rapport à un ensemble de dimension complémentaire.

Nous appelons  $K^{n-r}$  un complexe en position générale par rapport à un ensemble  $B^r$ , si son « échafaudage » à  $(n - r - 1)$  dimensions ne rencontre pas l'ensemble  $B^r$ .

<sup>1</sup> Voir [7] et surtout [9]. Les chiffres gras entre crochets se rapportent à la bibliographie indiquée à la fin.

Nous dirons qu'un complexe  $K^{n-1}$  se trouve en position générale par rapport à la suite fondamentale  $\{B^{r-j}\}$ , si chaque échafaudage à  $(n - r + j - 1)$  dimensions de  $K^{n-1}$  est en position générale par rapport à l'ensemble  $B^{r-j}$ . Un complexe  $K^{n-1}$  peut toujours être ramené à un complexe équivalent  $*K^{n-1}$  qui serait en position générale par rapport au système  $\{B^{r-j}\}$ . La construction de  $*K^{n-1}$  se fait par une généralisation de la méthode des modifications infinitésimales de complexes de M. Alexandroff. Remarquons encore que les complexes habituels de simplexes étant beaucoup trop « rigides » ne se prêtent guère à la solution du problème de la position générale d'un complexe et d'un ensemble et, surtout, pas dans le cas d'un système d'ensembles  $\{B^{r-j}\}$ . Pour cette raison l'on construit les complexes modifiés d'éléments qui sont eux-mêmes des complexes correspondant d'une façon univoque et réciproque aux simplexes du complexe donné.

Les invariants d'intersection et d'enlacement nous permettent de construire les cycles  $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$  sur un complexe à  $(n - 1)$  dimensions et en position générale par rapport au système d'ensembles  $\{B^{r-j}\}$ . Cette construction découle du simple principe de décompositions « disjonctives » de cycles, qui correspondent aux décompositions d'ensembles de dimension complémentaire et sont déterminées par ces dernières [9].

Nous pouvons maintenant formuler le lemme fondamental de cette théorie.

Si les cycles  $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$  et les ensembles  $\{B^{r-j}\}$  forment un système inductif d'enlacement, alors pour chaque nombre  $h = 0, 1, \dots, r$ , il existe dans  $F$  une multiplicité à  $h$  dimensions *arbitrairement petite*  $f^h$ , contenant des points de l'ensemble  $B^0$ . Il existe, en plus, dans  $B^0$  un *point de multiplicités à  $h$  dimensions*  $P^h$ , c'est-à-dire il existe dans  $F^0$  une suite de multiplicités (générales) à  $h$  dimensions  $f_1^h \supset f_2^h \supset \dots$  décroissantes et convergeant en un point  $P^h$  intérieur à  $B^0$ .

Dans la définition du système inductif d'enlacement la suite fondamentale était donnée d'une façon purement formelle. Par conséquent, les théorèmes énoncés ci-dessus sont valables d'une manière générale pour une multiplicité arbitraire  $F$  ou, plus généralement encore, pour un ensemble  $F = B^r$  satisfaisant par

exemple aux hypothèses du théorème Phragmen-Brouwer. Le système inductif d'enlacement doit avoir une construction correspondante au problème concret. L'on construit alternativement les cycles et les ensembles de suites fondamentales  $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$  et  $\{B^{r-j}\}$  pour les  $j$  croissants et l'on fait sur les ensembles  $B^{r-j}$  des hypothèses qui autorisent des conclusions inductives. L'on voit ainsi que ce sont seulement les démonstrations des théorèmes exposés brièvement dans la suite qui font voir toute la fécondité des systèmes inductifs d'enlacement.

### III. — LA STRUCTURE D'ENSEMBLES À PARTIR DE MULTIPLICITÉS ARBITRAIREMENT PETITES.

#### LES NOUVEAUX THÉORÈMES DE PAVAGE.

9. — C'est l'extension locale du théorème Phragmen-Brouwer-Alexandroff qui forme le premier échelon de la théorie infinitésimale des ensembles [1, 2]. Le théorème suivant est valable :

Soit  $F$  une multiplicité à  $r$  dimensions ou, plus généralement, un ensemble ( $\dim F = r$ ) satisfaisant aux hypothèses du théorème Brouwer-Alexandroff. Soit  $F = {}^1F + B^{r-1} + {}^2F$  une décomposition de  $F$  par un ensemble  $B^{r-1}$  à  $(r - 1)$  dimensions en deux composants ouverts  ${}^1F$  et  ${}^2F$ . Alors, il existe une multiplicité à  $r$  dimensions *arbitrairement petite*  $f^r = {}^1f^r + b^{r-1} + {}^2f^r$  décomposé par un sous-ensemble  $b^{r-1}$  de  $B^{r-1}$  en deux parties ouvertes  ${}^1f^r \subset {}^1F$  et  ${}^2f^r \subset {}^2F$ .

La démonstration de ce théorème [6] découle de l'invariance locale des cycles placés dans les deux premières lignes du système d'enlacement. Le cas particulier  $r = n - 1$  de ce théorème fut démontré pour la première fois et par des méthodes très différentes par M. H. D. URSELL et moi-même [2, 3, 4, 5, 8]. Les représentations dites harmoniques de complexes qui surgissent dans ce cas particulier et leurs invariants sont aussi, me semble-t-il, intéressantes en elles-mêmes. Ce théorème entraîne aussi que l'ensemble de tous les points de multiplicités  $r$ -dimensionnels dans  $F$  est à une dimension.

Les résultats suivants montrent très nettement que *la totalité*

des multiplicités arbitrairement petites de chaque dimension  $h \leq r$  a dans un ensemble à  $r$  dimensions la même étendue que les points de l'ensemble lui-même [7, 9]. En d'autres termes, si nous considérons toutes les multiplicités arbitrairement petites de diamètre  $\leq \delta$  ( $\delta$  étant arbitrairement petit), nous voyons qu'elles forment — dans un sens qui s'impose [9, § 1] — un système  $r$ -uplement connexe et cela que ce soient des courbes ( $h = 1$ ), des surfaces ( $h = 2$ ) ou des hypersurfaces de dimension arbitraire  $h \leq r$ . Nous aurons un résultat encore plus précis en considérant l'extension dimensionnelle des totalités des points de convergence des systèmes de multiplicités arbitrairement petites de chacune des dimensions fixes, c'est-à-dire des points de multiplicités définis plus haut (voir le lemme fondamental de § II). Mais pour cela une conception appropriée de la dimension s'impose.

*La notion relative de dimension.* Soit  $A$  un ensemble fermé à  $r$  dimensions dans  $R^n$ . Nous dirons qu'un ensemble donné  $\Phi$  (qui n'est pas nécessairement fermé) dans  $R^n$  a la *dimension homogène*  $j$  relativement à  $A$  ( $\text{hom dim } \Phi = j \text{ rel } A$ ) si  $j$  est le plus petit entier positif tel que chaque couple  $A'$  et  $A''$  de sous-ensembles fermés et disjoints de  $A$  peut être séparé par un ensemble  $B \subset A$  dans  $A$  ayant au plus la dimension  $(r - 1)$ , avec  $\text{hom dim } \Phi = j - 1 \text{ rel } B$ . Si  $C$  est un sous-ensemble fermé quelconque de  $A$  alors on a  $\text{hom dim } \Phi = -1 \text{ rel } C$  si  $\Phi$  et  $C$  sont disjoints. Si  $C$  est composé d'un seul point, alors on a  $\text{hom dim } \Phi = 0 \text{ rel } C$  si le point  $C$  est intérieur à  $\Phi$ ,  $\text{hom dim } \Phi = -1 \text{ rel } C$  s'il ne l'est pas<sup>1</sup>.

L'on voit immédiatement que cette notion de dimension est extrêmement intuitive. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant:

*Soient  $F$  un ensemble à  $r$  dimensions dans  $R^n$  et  $\Phi^h$  la totalité des points de multiplicités de dimension  $h$ . Alors, pour chaque valeur de  $h = 0, 1, \dots, r$  l'ensemble  $\Phi^h$  a la dimension homogène  $r$  relativement à  $F$ .*

<sup>1</sup> Il est évident que cette définition spéciale s'impose pour la dimension relative à un point. Soient  $A$  un segment  $(0, 1)$  et  $P = A$ . Les ensembles de séparation  $B$  sont formés de points singuliers et ne contiennent pas de parties disjointes. Pour avoir  $\text{hom dim } P = 1 \text{ rel } A$  il faut aussi avoir  $\text{hom dim } P = 0 \text{ rel } B$  (pour chaque  $B$ ).



Ces théorèmes et aussi ceux que j'exposerai dans la suite n'ont été démontrés jusqu'à présent que pour les ensembles formant des obstacles d'homologie pour des sphères à  $(n - r - 1)$  dimensions. Par conséquent, ces théorèmes sont en tous cas valables pour tous les ensembles à  $(r - 1)$  dimensions dans  $R^n$ . En général, ils sont valables pour tous les cas où l'ensemble satisfait aux hypothèses du théorème inductif Phragmen-Brouwer.

Les moyens dont nous disposons aujourd'hui nous permettent de démontrer pour chaque entier positif  $j \leq \left(r - \frac{n+1}{2}\right)$  le théorème suivant,  $F$  étant un ensemble arbitraire à  $r$  dimensions et  $2r > n + 1$ .

*La totalité  $\Phi^r$  de tous les points de multiplicités à  $r$  dimensions de  $F$ , a au moins la dimension homogène  $r$  rel  $F$ .*

10. — Soient  $F$  un ensemble à  $r$  dimensions dans un voisinage sphérique  $U$  de  $R^n$  et  $s^{n-r-1}$  une hypersphère à  $(n - r - 1)$  dimensions et  $\sim 0$  dans  $U - F$ . Soit  $\varepsilon$  un nombre positif arbitrairement petit et soit

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_i + \dots + F_m, \quad \delta(F_i) < \varepsilon$$

une décomposition de l'ensemble  $F$ . Il est connu qu'il existe, pour chaque  $\varepsilon$ , des décompositions de  $F$  dont chaque  $k$  ( $k = 2, 3, \dots, 2 + 2$ ) parties aient toujours une intersection à  $(r - k + 1)$  dimensions. Appelons ces décompositions de  $F$  des décompositions *canoniques*. Les théorèmes de pavage suivants sont valables [10]:

*Pour chaque  $\varepsilon$  suffisamment petit il existe  $r + 1$  parties de chaque décomposition canonique de  $F$  qui contiennent des points d'une multiplicité générale arbitrairement petite  $f^n$  de chaque dimension  $h = 0, 1, \dots, r$ .*

Il existe, de ce fait,  $r + 1$  parties de chaque décomposition canonique de  $F$ , ayants des points communs sur des courbes, surfaces et hypersurfaces générales arbitrairement petites de chaque dimension. Il s'agit ici d'un système fixe de  $r + 1$  parties pour tous les  $h$ . L'on voit aisément que le lemme fondamental

de M. LEBESGUE correspond au cas  $h = 0$  tandis que, pour chaque  $h > 0$ , nous trouvons un théorème de pavage de dimension supérieure.

La démonstration des théorèmes de pavage découlant du principe inductif d'enlacement donne aussi un résultat *purement quantitatif* sur les ensembles.

Pour avoir l'effet du théorème de M. Lebesgue ou des nouveaux théorèmes de pavage, nous devons évidemment supposer le  $\varepsilon$  de la décomposition de  $F$  « suffisamment petit ». Maintenant nous pouvons reconnaître, au moins en principe, la valeur et la signification de cet  $\varepsilon$ . Ici de nouveau nous nous restreignons au cas d'ensembles  $F$  ( $\dim F = r$ ) formant un obstacle d'homologie de la sphère à  $(n - r - 1)$  dimensions dans un voisinage sphérique  $U$  de  $R^n$ .

*L'effet de tous les théorèmes de pavage  $r + 1$  se présente pour chaque  $\varepsilon < \frac{1}{3^r} D$ ,  $D$  étant la distance  $\rho(s^{n-r-1}, F)$ .*

Par conséquent, le  $\varepsilon$  des théorèmes de pavage dépend de  $r$  et  $D$ . Plus grande peut-on supposer la distance  $D$ , plus grand  $\varepsilon$  peut être choisi. Dans le cas absolu, où  $F$  forme un obstacle d'homologie d'une sphère à  $(n - r - 1)$  dimensions  $R^n$ , il se peut évidemment qu'on puisse supposer  $D$  arbitrairement grand. Dans ce cas l'on peut, de ce fait, supposer  $\varepsilon$  arbitrairement grand, c'est-à-dire  $\leq M$ ,  $M$  étant un entier positif arbitrairement grand. Il serait intéressant, me semble-t-il, de déterminer le  $\varepsilon$  pour des classes plus spéciales d'ensembles et de figures géométriques.

Les points de multiplicités de chaque dimension  $h = 0, 1, \dots, r$  permettent aussi d'apporter plus de précision aux théorèmes de pavage <sup>1</sup> [7, 10].

$F$  étant dans  $U$  un ensemble enlacé avec la sphère  $s^{n-r-1}$  (ou, plus généralement, ayant  $s^{n-r-1} \not\sim 0$  dans  $U - F$ ), alors il existe pour chaque  $\varepsilon < \frac{1}{3^r} \rho(F, s^{n-r-1})$  une décomposition canonique de  $F$  avec  $r + 1$  parties, qui contiennent un point de multiplicités commun de chaque dimension  $h = 0, 1, \dots, r$ .

<sup>1</sup> La démonstration des nouveaux théorèmes de pavage pour tous les ensembles satisfaisant aux conditions du théorème inductif Phragmen-Brouwer sera indiquée dans un travail postérieur.

## IV. — AUTRES PROBLÈMES.

11. — Les résultats indiqués plus haut nous permettent de considérer les multiplicités générales comme des éléments à dimension supérieure d'un ensemble. Au moins d'une façon infinitésimale nous pourrions comparer la composition d'un ensemble à partir de multiplicités arbitrairement petites à la composition d'un simplexe à partir de simplexes arbitrairement petits de chaque dimension. Sans doute, ce sont ici les premiers résultats obtenus dans cette direction; ils permettent cependant de poser, aussi globalement, plusieurs autres problèmes. Pour terminer, je voudrais en mentionner quelques-uns <sup>1</sup>.

La tâche consiste en la construction d'un système inductif d'enlacement, correspondant au problème concret donné. En général, la solution de ce problème est facile pour le cas d'ensembles formant des obstacles d'homologie des hypersphères. Dans le cas général d'ensembles enlacés avec des cycles arbitraires, on peut facilement étendre les cycles  $j$  fois, si l'on a  $j < \left(r - \frac{n+1}{2}\right)$ . En conséquence, nous ne pouvons établir des nouveaux théorèmes de pavage que jusqu'à la  $j$ -ème dimension. Pour des  $j \leq r$  et des  $r < n$  arbitraires la solution générale n'existe pas encore <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> D'autres problèmes liés immédiatement à la théorie exposée ici sont indiqués dans les travaux mentionnés dans la bibliographie.

<sup>2</sup> Ayant déjà terminé le manuscrit de cette conférence, j'ai pu encore démontrer les théorèmes de pavage, de même que les théorèmes énoncés dans le paragraphe 9, pour tous les ensembles fermés à un nombre arbitraire de dimensions dans  $\mathbb{R}^n$ . En même temps le problème d'étendre  $r$  fois un cycle par rapport à un  $F$  arbitraire dans  $U$  a été résolu.

La solution repose sur le lemme suivant:

Soient  $F$  un ensemble fermé à  $r$  dimensions arbitraire dans  $\bar{U}$  et  $\Gamma^{n-r-1}$  un cycle arbitraire (mod. 0) à  $(n - r - 1)$  dimensions dans  $U - F$ ;  $\Gamma^{n-r-1} \not\sim 0$  dans  $U - F$ . Alors il existe une suite de complexes à  $(n - r)$  dimensions  $\{K_\nu^{n-r}\}_{\nu=1, 2, \dots}$

$$K_\nu^{n-r} \rightarrow \Gamma^{n-r-1} \quad \text{dans } U, \nu = 1, 2, \dots$$

tels que  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{K_\nu^{n-r} \cap F\}$  soit un ensemble à 0 dimensions.

12. — D'autres problèmes se présentent si l'on veut caractériser les multiplicités classiques à ce nouveau point de vue. La définition de l'ordre des points de multiplicités peut être considérée comme un travail préparatoire dans cette direction.

Soient  $\{f_n^h\}$  et  $\{f_m^h\}$  pour  $n, m = 1, 2, \dots$  deux suites de multiplicités décroissantes à  $h$  dimensions ayant un point limite P commun. Si une multiplicité  $f_\mu^h$  (pour  $m = \mu$ ) contient toutes les  $f_n^h$  pour chaque  $\mu$  arbitrairement grand et si, réciproquement, une multiplicité  $f_n^h$  contient presque toutes les  $f_m^h$  si grand que soit  $n = \nu$ , alors nous appelons les suites  $\{f_n^h\}$  et  $\{f_m^h\}$  *équivalentes* et nous dirons qu'elles définissent le point P comme un point de multiplicités à  $h$  dimensions. Si toutes les suites qui définissent un point P comme un point de multiplicités à  $h$  dimensions sont équivalentes, nous appellerons P un point de multiplicités *simple*. Il est clair que le nombre (fini ou infini) de suites  $\{f_n^h\}$  non équivalentes définissant le point P comme un point de multiplicités à  $h$  dimensions peut être considéré comme ordre (à  $h$  dimensions) de P.

F étant un ensemble à  $r$  dimensions, nous appelons un point P de F point *régulier* si,  $\delta$  étant un nombre arbitrairement petit, il existe un  $\eta < \delta$  et tel qu'une multiplicité à  $r$  dimensions de diamètre  $\leq \delta$  contienne tous les points de F intérieurs à un voisinage  $U(\eta)$ . Un ensemble F est dit *régulier* si tous ses points sont réguliers. Il est clair qu'un point régulier de F doit être simple dans la dimension  $r$ -ème. Il serait intéressant de savoir si un ensemble fermé F dont tous les points sont des points simples dans la  $r$ -ème dimension est régulier lui-même.

Il serait notamment intéressant de savoir si la notion générale de multiplicité permettrait à elle seule de caractériser les multiplicités classiques<sup>1</sup>. L'on pourrait essayer d'appliquer ici aussi le principe inductif.

Une multiplicité générale à  $h$  dimensions (et notamment dans le sens absolu, c'est-à-dire définie dans  $U = R^n$ ) est appelée *simplement connexe (localement) dans la dimension  $(h - 1)$ -ème* si chaque point P de F peut être séparé de chaque point  $R \neq P$  de F par une multiplicité à  $(h - 1)$  dimensions  $f^{h-1}$  placée dans

<sup>1</sup> En se servant des nombres de Betti généralisés M. Lefschetz a résolu ce problème pour des ensembles fermés, M. E. Čech pour des espaces topologiques.

$U(P, \delta)$  (pour chaque  $\delta$ ) et simplement connexe (localement) dans la dimension  $(h - 2)$ -ème. L'induction peut ici commencer par  $f^0$  ou  $f^1$ , c'est-à-dire par des cercles topologiques. La question qui se pose est la suivante: *les ensembles à  $r$  dimensions, localement simplement connexes dans la  $(r - 1)$ -ème dimension, sont-ils des multiplicités classiques* (dans le sens étendu de MM. VAN KAMPEN et PONTRJAGIN) ?<sup>1</sup>.

13. — Cette question ne doit pas être confondue avec le problème de caractériser les multiplicités classiques par les propriétés de l'espace complémentaire et notamment avec le problème de la réciproque du théorème de Jordan dans les espaces à un nombre supérieur de dimensions. Ce dernier problème a aujourd'hui de l'intérêt aussi dans  $R^3$ . Il faut ici distinguer entre les conditions locales (dans le sens ordinaire) et les conditions globales qui sont plus essentielles. Les premières peuvent facilement être indiquées de diverses manières; la seule solution dans  $R^3$  connue jusqu'à présent<sup>2</sup> repose sur l'hypothèse de la connexion simple du domaine complémentaire d'une surface fermée. Il est naturel que la démonstration se serve du théorème de dualité de M. ALEXANDER. Mais je voudrais remarquer ici qu'il existe une forme purement ensembliste de la réciproque du théorème de Jordan dans  $R^3$ .

*Pour qu'une surface  $F$  à deux dimensions dans  $R^3$ , fermée et régulière (dans le sens indiqué plus haut) dans chaque point soit une sphère topologique il faut et il suffit que chaque section irréductible d'un domaine complémentaire de  $F$  soit une multiplicité de Cantor.*

La condition de régularité pourrait être remplacée par une autre condition, aussi purement ensembliste<sup>3</sup>. Bien que la forme de ce théorème soit purement ensembliste, sa démonstration est essentiellement combinatoire et ne pourrait guère être ramenée immédiatement aux théorèmes de dualité. L'on remarque toujours que les problèmes ensemblistes sous une *forme générale*

<sup>1</sup> L'on sait que cette assertion est vraie pour le cas le plus simple  $h = 2$ .

<sup>2</sup> Voir R. L. WILDER, *Math. Annalen*, 109 (1933), p. 273.

<sup>3</sup> Si l'on voulait se servir de notions plus anciennes, il suffirait d'exiger (localement) que la surface  $F$  soit accessible et « unbewallt » à partir des domaines complémentaires.

ne peuvent être résolus que par des moyens combinatoires et conduisent souvent à des nouveaux problèmes combinatoires.

Je ne saurais indiquer à quel point une surface fermée dans  $R^n$  et satisfaisant à des conditions analogues, doit être une multiplicité dans le sens classique.

14. — Nous voulons revenir encore à des multiplicités générales.

La supposition suivante indique un problème global très intéressant.

Soit  $F$  une variété générale à  $r$  dimensions. Soient  $A^h$  et  $B^h$  deux sous-ensembles fermés à  $h$  dimensions de  $F$ , pour un  $h = 0, 1, \dots, r - 1$  fixe. Nous prétendons qu'il existe toujours une multiplicité de Cantor à  $(h + 1)$  dimensions  $T^{h+1}$  contenant  $A^h$  et  $B^h$ .

Ce problème est très lié au problème du *prolongement* des multiplicités arbitrairement petites à  $h$  dimensions dans  $F$ , et ce dernier présente des analogies avec les surfaces de Riemann. En général, la possibilité d'une analogie même globale entre les ensembles fermés et les espaces de Riemann n'est point absurde. L'on pourrait, par exemple, envisager les multiplicités générales comme des *surfaces pliées une infinité de fois* et les ensembles comme des totalités de telles surfaces; il n'est pas impossible d'avoir une vue des éléments d'accumulation qui se présentent ainsi. Dans  $R^3$  l'on connaît ces éléments qu'on pourrait aussi appeler des « ideal elements ». Il est sûr que les recherches sur la totalité de ces singularités d'un ensemble se feront par les méthodes de la topologie combinatoire.

---

<sup>1</sup> Il est facile de démontrer cette assertion pour  $h = 0$ .

Dans  $R^n$  l'on peut toujours relier un couple  $A^h$  et  $B^h$  d'ensembles à  $h$  dimensions par une multiplicité de Cantor  $T^{h+1}$ . Considérons une suite de décompositions en simplexes  $z(\varepsilon^\nu)$  de  $R^n$  dont les diamètres tendent vers 0. Déterminons à partir des  $(h + 1)$  — simplexes de  $z(\varepsilon^1)$  une variété de Cantor  $K_1^{h+1}$  telle que l'on ait  $d(A^h + B^h, K_1^{h+1}) < \varepsilon^1$ . Ajoutons à  $K_1^{h+1}$  un complexe  $K_2^{h+1}$  de tous les  $(h + 1)$  — simplexes de  $z(\varepsilon^2)$  dont la distance de  $(A^h + B^h)$  serait inférieure à  $\varepsilon^2$ , etc. L'enveloppe fermée de  $\Sigma K_\nu^{h+1}$  pour  $\nu \rightarrow \infty$  est une multiplicité de Cantor à  $(h + 1)$  dimensions, reliant  $A^h$  et  $B^h$ .

BIBLIOGRAPHIE <sup>1</sup>

- [1] B. KAUFMANN, Sur les surfaces fermées générales et la dimension locale. *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 198 (1934).
- [2] (Id.), Cantor Manifolds lying on a closed surface. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 30 (1934).
- [3] (Id.), Über die Struktur ebener Cantorscher Mannigfaltigkeiten. *Ibid.*, 30 (1934).
- [4] H. D. URSELL, Cantor Manifolds lying on a closed surface, Part II. *Ibid.*, 31 (1935).
- [5] B. KAUFMANN und H. D. URSELL, The Dissection of closed Surfaces and the Phragmen-Brouwer-Alexandroff Theorem. *Proc. N.A.S. (U.S.A.)*, 20 (1934).
- [6] B. KAUFMANN, Dissection of closed sets of arbitrary Dimension and the generalised Brouwer-Alexandroff Theorem. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 31 (1935).
- [7] B. KAUFMANN, Sur les propriétés infinitésimales des ensembles fermés de dimension arbitraire. *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 201 (1935).
- [8] (Id.), Der lokale Dimensionsbegriff. *Math. Annalen*, 112 (1935).
- [9] (Id.), On infinitesimal properties of closed sets of arbitrary dimension paraîtra dans les *Annals of Math.*
- [10] (Id.), On the extension of the Pflastersatz. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 32 (1936).

NOTES COMPLÉMENTAIRES A MA CONFÉRENCE  
SUR LA TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS

1. — Au lieu du passage de la Géométrie anallagmatique de M. J. HADAMARD, cité dans ma conférence sur la Topologie des variétés, t. 35, p. 246, il serait préférable de lire la Note L insérée dans le tome II de ses *Leçons de Géométrie élémentaire* (7<sup>me</sup> édition, Paris 1932).

2. — Le dernier paragraphe de la page 249 ne concerne que les surfaces orientables. Car la variété-voisinage d'une surface non-orientable immergée dans l'espace à quatre dimensions doit être orientable, comme chaque variété à  $n - 1$  dimensions immergée sans singularités dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions. Or, le produit topologique du cercle et d'une surface non-orientable est non-orientable, lui aussi. — Voir à ce sujet H. SEIFERT, Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten, *Math. Zeitschrift* 40 (1936) et W. HANTZSCHE, Einlagerung von Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume, *ibid.* 42 (1937).

3. — L'article de M. E. STIEFEL, cité à la page 250, vient de paraître: *Comm. math. helv.*, vol. 8, p. 305-353. Il faudrait le lire également au sujet des variétés immergées dans des espaces euclidiens.

W. THRELFALL.

<sup>1</sup> Cette bibliographie indique seulement les travaux s'occupant directement de la théorie exposée ici.