V. – AUTRE GÉNÉRALISATION.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Soient Ω l'intersection de Δ_1 et Δ_2; S_1, S_2 les intersections de D avec le cercle circonscrit O, S_3 le troisième point dont la droite de Simpson (φ) passe par Ω; et Δ_3 cette droite. (D, δ) étant un angle égal à φ, la direction D est connue. Le point S_3 est donné alors par le théorème n° 5, et Ω est déterminé comme intersection de Δ_3 et de δ puisque δ doit passer par Ω.

S_1, S_2 sont alors les intersections de O avec une conique qui passe par S_3, Ω etc... (n° 5, 1er alinéa).

Si $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$ il n'y a qu'une position de Ω et par suite de D, le système se trouve alors parfaitement déterminé.

Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$ les droites Δ_3 et δ coïncident, et il y a une infinité de positions pour D; ce qui démontre le théorème de Lemoyne dont le cas précédent est une généralisation.

13. — On peut se demander maintenant si cette généralisation n'est pas illusoire, en d'autres termes si le cercle variable Γ n'est pas toujours circonscrit au triangle podaire ordinaire d'un point qui décrit une droite ou une conique circonscrite.

Or si L, M, N, étaient les projections orthogonales sur a, b, c, d'un même point, les projetantes seraient tangentes à une conique de foyer S et dont le cercle principal aurait pour rayon celui de Γ multiplié par $\cos \cdot \varphi$.

Cette conique aurait trois tangentes qui passeraient par un même point.

En outre le point qui a L pour projection sur a, et le second point d'intersection de Γ avec b, pour projection sur b, ne décrit pas en général une droite.

Donc, les cas où $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ sont bien distincts de celui de Lemoyne.

V. — Autre généralisation.

14. — Par un point donné ne passent que trois positions du cercle podaire d'un point qui décrit une droite. Ceci résulte du n° III-10 puisque les projections du point sur les côtés déterminent un système convergent.

Ces cercles podaires ne peuvent donc que trois à trois, avoir deux points communs.

15. — Proposons-nous de chercher le lieu d'un point M dont le cercle podaire reste orthogonal à un cercle fixe C du plan d'un triangle.

Ce lieu coupe en n points une droite quelconque D ne joignant pas deux points inverses du lieu. Les cercles podaires de ces points sont orthogonaux à C, ils sont en outre orthogonaux au cercle, défini par le théorème de Lemoyne, relatif à D.

Or les n cercles sont distincts puisque aucun des points correspondants n'a son inverse sur D.

Ayant deux cercles orthogonaux communs ces cercles formant un faisceau, et, par suite, ont deux points communs.

Donc $n = 3$, d'après le n° 14.

Il en résulte que:

Le lieu d'un point du plan d'un triangle, dont le cercle podaire reste orthogonal à un cercle arbitraire du plan, est une cubique qui est à elle-même son inverse triangulaire, et qui, par suite, est circonscrite au triangle.

16. — Réciproquement:

Dans tout triangle, le cercle podaire d'un point qui décrit une cubique confondue avec son inverse, reste orthogonal à un cercle fixe.

En effet soient γ cette cubique et M, N, P, trois points de celle-ci tels que deux d'entre eux ne soient pas inverses l'un de l'autre.

Leurs inverses M', N', P', appartiennent encore à γ; soit C le cercle orthogonal aux cercles podaires des points M, N, P.

Le lieu d'un point dont le cercle podaire reste orthogonal à C est une cubique γ, circonscrite au triangle et passant par M, N, P, — M', N', P'.

La cubique γ_1, a donc 9 points communs avec γ; il en résulte que les deux cubiques coïncident.