

SUR UNE APPLICATION DU DERNIER THÉORÈME DE FERMAT

Autor(en): **Thébault, V.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28037>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR UNE APPLICATION DU DERNIER THÉORÈME DE FERMAT

PAR

V. THÉBAULT, Le Mans (Sarthe).

La question de Mathématiques élémentaires posée au *Concours d'Agrégation des Sciences mathématiques* (Paris 1923), consistait en l'étude de certaines propriétés d'un triangle ABC dans lequel les centres des carrés construits *intérieurement* sur les côtés sont trois points en ligne droite.

La dernière partie de l'énoncé comportait la relation

$$5(a^4 + b^4 + c^4) = 6(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2), \quad (1)$$

entre les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, afin de démontrer que, *dans un tel triangle, les longueurs a, b, c ne sont jamais simultanément exprimées par des nombres entiers.*

1. — Posons

$$\begin{aligned} a^2 = x, \quad b^2 = y, \quad c^2 = z; \quad y + z - x = 2X^2, \quad z + x - y = 2Y^2, \\ x + y - z = 2Z^2, \quad (0 \leq X \leq Y \leq Z). \end{aligned} \quad (2)$$

La condition (1) s'écrit aussi

$$f(a^2, b^2, c^2) = 5(a^4 + b^4 + c^4) - 6(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 0, \quad (3)$$

ou, employant les notations (2),

$$f(x, y, z) = 8(x^2 + y^2 + z^2) - 3(x + y + z)^2 = 0, \quad (4)$$

ou encore, après des calculs simples,

$$X^4 + Y^4 + Z^4 - 2Y^2Z^2 - 2Z^2X^2 - 2X^2Y^2 = 0, \quad (5)$$

ou enfin

$$(X + Y + Z)(X + Y - Z)(X - Y + Z)(-X + Y + Z) = 0. \quad (6)$$

Des relations (39) contenues dans un article précédent¹, il résulte que

$$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 > \overline{AB}^2, \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 > \overline{BC}^2, \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 > \overline{CA}^2,$$

ce qui prouve que *les angles A, B, C du triangle sont aigus*. Par suite, les valeurs de X^2, Y^2, Z^2 , en fonction de x, y, z , sont bien positives, et si $a \geq b \geq c$, on a

$$X \leq Y \leq Z.$$

X, Y, Z étant réels et positifs, la relation précédente exige que

$$Z = X + Y. \quad (7)$$

Les nombres a, b, c qui vérifient la condition (3) ne peuvent être simultanément entiers.

S'ils l'étaient en effet, on pourrait, en divisant par leur plus grand commun diviseur, ce qui revient à remplacer le triangle ABC par un triangle semblable, les supposer premiers entre eux dans leur ensemble, et alors il y aurait lieu de considérer trois cas :

1^o *les trois nombres a, b, c sont impairs* : $5(a^4 + b^4 + c^4)$ l'est aussi, et (3) est impossible.

2^o *deux d'entre eux sont impairs, un pair* : par exemple,

$$a = 2a' + 1, b = 2b' + 1, c = 2c'; \quad (a', b', c' \text{ entiers})$$

alors

$$x + y + z = a^2 + b^2 + c^2 = 2(2\lambda + 1), \quad (\lambda \text{ entier})$$

$$(x + y + z)^2 = 4(2\lambda + 1)^2;$$

et, (4) étant impossible, (1) l'est également.

3^o *un nombre impair, deux pairs* : $5(a^4 + b^4 + c^4)$ étant impair, (1) est encore impossible.

¹ *L'Enseignement mathématique*, 1934, p. 323.

2. — Voici un autre procédé qui, d'une manière indirecte, conduit à la même conclusion.

L'équation (1) devient

$$8(a^4 + b^4 + c^4) = 3(a^2 + b^2 + c^2)^2, \quad (8)$$

en complétant le carré du second membre.

Elle devient en outre

$$8(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2, \quad (9)$$

dans laquelle α , β , γ sont les quotients de a , b , c par leur plus grand commun diviseur.

Les nombres α , β , γ étant premiers entre eux, on peut toujours supposer, en vertu de (9), que α , par exemple, est pair, β et γ étant impairs.

De plus, 4 divise $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et par suite $\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2$.

Posons

$$x^2 = \frac{1}{2}\alpha^2, \quad y^2 = \frac{1}{4}(\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2), \quad z^2 = \frac{1}{2}(\beta^2 + \gamma^2)$$

ou

$$\alpha^2 = 2x^2, \quad \beta^2 = 3x^2 + 2y^2 + z^2, \quad \gamma^2 = 3x^2 + 2y^2 - z^2.$$

x , y , z sont premiers entre eux, autrement α , β , γ admettraient un diviseur commun.

L'équation (9) devient alors

$$x^4 = y^4 + z^4. \quad (10)$$

Cette équation de FERMAT est impossible en nombres entiers. Comme elle entraîne les équations (9) et (8), et réciproquement, dans l'hypothèse (1) envisagée, *les nombres a, b, c ne peuvent être entiers simultanément.*

Remarque. Le raisonnement direct du premier paragraphe constitue donc une preuve, peut-être nouvelle, de l'impossibilité de l'équation

$$x^4 = y^4 + z^4$$

en nombres entiers.

3. — Ces développements suggèrent des remarques plus générales.

Soit un triangle ABC dont les longueurs des côtés BC, CA, AB sont exprimées par des nombres a, b, c .

1° Si l'on pose

$$2(b^n c^n + c^n a^n + a^n b^n) = p, \quad a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} = q,$$

n étant un entier quelconque, puis

$$k = \frac{2(b^n c^n + c^n a^n + a^n b^n) + a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}}{2(b^n c^n + c^n a^n + a^n b^n) - (a^{2n} + b^{2n} + c^{2n})}, \quad (11)$$

on a

$$k = \frac{p + q}{p - q} = 1 + \frac{2q}{p - q}.$$

k est un nombre entier lorsque

$$2q = m(p - q),$$

m étant entier. Il en résulte d'abord que

$$(m + 2)q = mp,$$

puis, que les côtés du triangle ABC satisfont à la relation

$$(m + 2)(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}) = 2m(b^n c^n + c^n a^n + a^n b^n). \quad (12)$$

Cette condition qui s'écrit aussi

$$2(m + 1)(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}) = m(a^n + b^n + c^n)^2 \quad (13)$$

devient en outre

$$2(m + 1)(\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \gamma^{2n}) = m(\alpha^n + \beta^n + \gamma^n)^2, \quad (14)$$

dans laquelle α, β, γ sont les quotients de a, b, c par leur plus grand commun diviseur d .

Les nombres α, β, γ étant premiers entre eux, on peut toujours supposer, en vertu de la relation (14), que α , par exemple, est pair, β et γ étant impairs.

En effet, quand m est impair, $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ est pair. Si m est pair, ($m = 2m'$),

$$(2m' + 1)(\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \gamma^{2n}) = m'(\alpha^n + \beta^n + \gamma^n)^2;$$

dès lors, $\alpha^{2n} + \beta^{2n} + \gamma^{2n}$ ou $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ est pair, selon que m' est pair ou impair.

2° Admettons, par hypothèse, que $m + 1$ divise $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ et par suite $\beta^n + \gamma^n - m\alpha^n$, puis posons

$$x^n = \frac{1}{2} \alpha^n, \quad y^n = \frac{1}{m+1} (\beta^n + \gamma^n - m\alpha^n), \quad z^n = \frac{1}{2} (\beta^n - \gamma^n)$$

ou

$$\begin{aligned} \alpha^n &= 2x^n, & \beta^n &= mx^n + \left(\frac{m+1}{2}\right)y^n + z^n, \\ \gamma^n &= mx^n + \left(\frac{m+1}{2}\right)y^n - z^n. \end{aligned} \quad (15)$$

x, y, z sont premiers entre eux, autrement α, β, γ admettraient un diviseur commun.

Introduisant les expressions (15) dans la relation (14), on obtient l'équation

$$4(m-2)x^{2n} = (m+1)y^{2n} + 4z^{2n}. \quad (16)$$

3° Il est évident que pour $m = 3$, $m + 1 = 4$ divise $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$; car $2(m+1) = 8$, et par suite $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n = M \cdot 4$.

Cette hypothèse conduit, avec (16), à l'équation de FERMAT

$$x^{2n} = y^{2n} + z^{2n}, \quad (17)$$

qui entraîne la relation

$$5(a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}) = 6(b^n c^n + c^n a^n + a^n b^n), \quad (18)$$

entre les côtés du triangle ABC et réciproquement.

Observons également que dans tous les triangles de cette forme, où n est un entier quelconque, le rapport k est constant et égal à 4.

4. — Lorsque $n = 1$, les équations (17), (18) deviennent

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + z^2 \\ 5(a^2 + b^2 + c^2) &= 6(bc + ca + ab). \end{aligned} \quad (19)$$

Cette dernière, qui lie les côtés d'un triangle ABC, est vérifiée par des nombres entiers dont les formes sont connues¹. Si l'on pose

$$\begin{aligned} x &= u^2 + v^2, & y &= u^2 - v^2, & z &= 2uv, \\ a &= 2\lambda(u^2 + v^2), & b &= \lambda(5u^2 + 2uv + v^2) \\ c &= \lambda(5u^2 - 2uv + v^2), \end{aligned} \quad (20)$$

u, v étant des nombres premiers entre eux et de parités différentes et λ un nombre entier quelconque.

Aux propriétés déjà signalées², ajoutons les relations suivantes entre les rayons r, r_a, r_b, r_c des cercles tritangents, le rayon R du cercle circonscrit et le demi-périmètre p de ce triangle spécial ABC, qui résultent de ce que

$$(2 \Sigma bc + \Sigma a^2) : (2 \Sigma bc - \Sigma a^2) = k = 4, \quad (21)$$

$$p^2 = r(4R + r), \quad r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = 4r(r_a + r_b + r_c). \quad (22)$$

En outre, G et I étant le barycentre et le centre du cercle inscrit du triangle ABC, la formule classique

$$GI^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$$

se réduit à

$$GI = r.$$

Dans ce triangle particulier, *le cercle inscrit passe par le centre de gravité*. Cette propriété connue découle ici très simplement de l'expression du rapport k .

5. — Quand $n = 2$, on retrouve la relation (1) entre les côtés d'un triangle ABC et les conséquences que nous en avons déduites.

¹ A. ERRERA, *Mathesis*, 1924, p. 408.

² *Mathesis*, 1924, p. 314.

De plus, S étant l'aire du triangle, de la formule classique

$$16S^2 = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4,$$

il résulte que

$$4 = k = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \right)^2 = (\cot A + \cot B + \cot C)^2; \quad (23)$$

d'où

$$\cot A + \cot B + \cot C = 2. \quad (24)$$

En outre,

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= 24S^2, & b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 &= 20S^2, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 8S. \end{aligned} \quad (25)$$

Remarque. La relation (7) équivaut à celle-ci,

$$\sqrt{\cot A} + \sqrt{\cot B} = \sqrt{\cot C},$$

que nous avons déjà donnée (*Mathesis*, 1931, p. 284), et qui est aussi une conséquence des relations (24) et (25).

ERRATUM. — Dans la formule (22), *E. M.*, 34^e année, il faut lire $\left(1 + \frac{nd}{2R}\right)$.

SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI

PAR

D. MIRIMANOFF (Genève).

En relisant une Note sur le quotient de Fermat et les nombres de Bernoulli, que j'ai publiée en 1895¹, je viens d'y découvrir deux erreurs dans l'énoncé et la démonstration des formules du paragraphe 2. La première est une faute d'impression, la seconde, plus importante, un *lapsus calami*. Je tiens à les corriger; je crois utile de compléter en même temps la démonstration de mes formules, que je m'étais borné à esquisser.

¹ Sur la congruence $(r^{p-1} - 1) : p \equiv q_r \pmod{p}$. *Journ. für die reine und angew. Math.*, t. 115, p. 295-300.