Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES

Kapitel: 3. — Enoncé du problème; conditions d'existence DU LIEU.

Autor: Lebesgue, Henri

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28584

3. — Enoncé du problème; conditions d'existence du lieu.

Etant données une circonférence γ, une droite d, une constante non nulle k, étudions *le lieu* $\mathcal{C}$ *des points* M *tels que l'on ait:*

$$\mathcal{P}(M, \gamma) = k\,\overline{Md}^2 . \tag{7}$$

La famille des courbes $\mathcal{C}$ contient les coniques.

Si ce lieu existe, il admettra pour axe de symétrie la perpendiculaire ωx abaissée du centre ω de γ sur d.

Soit Λ une droite faisant l'angle φ avec ωx et rencontrant d au point K; pour M sur Λ, Md, c'est-à-dire la longueur de $\overline{Md}$, égale MK cos φ, donc les points d'intersection de Λ et de $\mathcal{C}$ sont ceux où Λ coupe la courbe définie par la relation

$$\mathcal{P}(M, \gamma) = k \cos^2 \varphi\, \overline{MK}^2 . \tag{8}$$

Cette courbe est un cercle Z du faisceau γ, K, ou exceptionnellement l'axe de ce faisceau.

Les points cherchés existeront si cette circonférence auxiliaire Z existe et coupe Λ. Pour le cas où Λ passe par ω l'existence de Z est seule en question.

Or, d'après (6), elle existe sauf si l'on a:

$$k(r^2 \cos^2 \varphi - \overline{\omega d}^2) > r^2 ,$$

r étant le rayon de γ.

Quant à $\mathcal{C}$, elle existera sauf si l'inégalité précédente était vérifiée quel que soit φ. Or, la parenthèse devenant négative pour φ assez voisin de $\frac{\pi}{2}$ il faudrait $k < 0$ et ceci exigerait alors que la parenthèse soit toujours négative, d'où

$$\omega d = \text{longueur de } \overline{\omega d} > r .$$

Enfin, comme la plus petite valeur du premier membre est atteinte pour $\varphi = 0$, *le lieu* $\mathcal{C}$ *existe sauf si l'on a à la fois:*

$$\omega d > r \qquad k(\overline{\omega d}^2 - r^2) + r^2 < 0 . \tag{9}$$

Pour $\omega d = r$ la seconde inégalité ne peut être vérifiée; pour $\omega d > r$ et $k(\overline{\omega d}^2 - r^2) + r^2 = 0$, $\mathcal{C}$ se réduirait à un point, au pôle H de d par rapport à γ. Il était donc légitime d'écarter comme nous l'avons fait le cas où les inégalités se transformeraient en égalités.

4. — Construction par points et par tangentes.

Pour construire $\mathcal{C}$ on prendra une droite Λ que l'on fera varier continûment. Choisissons $\varphi = 0$, donc prenons une droite D parallèle à ωx et dont nous ferons varier le pied H sur d. La relation (8) devient:

$$\mathcal{P}(\mathrm{M}, \gamma) = k\,\overline{\mathrm{MH}}^2 . \tag{10}$$

Pour $k = 1$, cette relation définit une droite Γ, d'où un point M sur D. Ainsi, *pour* k $= 1$, $\mathcal{C}$ *admet un point et un seul sur toute droite* D *parallèle à* ωx; nous dirons que $\mathcal{C}$ est *parabolique.*

Pour $k \neq 1$, la relation (10) définit une circonférence Γ dont le centre est le point Ω de $\mathrm{H}\omega$ tel que

$$\frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{\Omega \mathrm{H}}} = k . \tag{11}$$

Donc, quand H varie sur d, Ω décrit la perpendiculaire Oy à Oωx qui est l'homothétique de d par rapport à ω et dans le rapport

$$\frac{\overline{\omega\Omega}}{\overline{\omega \mathrm{H}}} = \frac{-k}{1-k} . \tag{12}$$

Les deux points M et M′ de $\mathcal{C}$ situés sur D sont, quand ils existent, symétriques l'un de l'autre par rapport à Oy; ainsi, *pour* k $\neq 1$, *la courbe* $\mathcal{C}$ *a un centre* O *et deux axes de symétrie rectangulaires* Oωx, Oy.

Reprenons une droite Λ quelconque; ses points de rencontre avec $\mathcal{C}$ sont sur la circonférence Z définie par (8). Mais tous les points communs à $\mathcal{C}$ et à Z, vérifiant (7) et (8), sont tels que