

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CERCLES FOCALUX DES CONIQUES  
**Kapitel:** 4. — Construction par points et par tangentes.  
**Autor:** Lebesgue, Henri  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28584>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Pour  $\omega d = r$  la seconde inégalité ne peut être vérifiée; pour  $\omega d > r$  et  $k(\overline{\omega d^2} - r^2) + r^2 = 0$ ,  $\mathcal{C}$  se réduirait à un point, au pôle H de  $d$  par rapport à  $\gamma$ . Il était donc légitime d'écartier comme nous l'avons fait le cas où les inégalités se transformeraient en égalités.

4. — CONSTRUCTION PAR POINTS ET PAR TANGENTES.

Pour construire  $\mathcal{C}$  on prendra une droite  $\Lambda$  que l'on fera varier continûment. Choisissons  $\varphi = 0$ , donc prenons une droite D parallèle à  $\omega x$  et dont nous ferons varier le pied H sur  $d$ . La relation (8) devient:

$$\mathcal{E}(M, \gamma) = k \overline{MH}^2 . \quad (10)$$

Pour  $k = 1$ , cette relation définit une droite  $\Gamma$ , d'où un point M sur D. Ainsi, pour  $k = 1$ ,  $\mathcal{C}$  admet un point et un seul sur toute droite D parallèle à  $\omega x$ ; nous dirons que  $\mathcal{C}$  est parabolique.

Pour  $k \neq 1$ , la relation (10) définit une circonférence  $\Gamma$  dont le centre est le point  $\Omega$  de  $H\omega$  tel que

$$\frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{\Omega H}} = k . \quad (11)$$

Donc, quand H varie sur  $d$ ,  $\Omega$  décrit la perpendiculaire  $Oy$  à  $O\omega x$  qui est l'homothétique de  $d$  par rapport à  $\omega$  et dans le rapport

$$\frac{\overline{\omega\Omega}}{\overline{\omega H}} = \frac{-k}{1-k} . \quad (12)$$

Les deux points M et M' de  $\mathcal{C}$  situés sur D sont, quand ils existent, symétriques l'un de l'autre par rapport à  $Oy$ ; ainsi, pour  $k \neq 1$ , la courbe  $\mathcal{C}$  a un centre O et deux axes de symétrie rectangulaires  $O\omega x$ ,  $Oy$ .

Reprenons une droite  $\Lambda$  quelconque; ses points de rencontre avec  $\mathcal{C}$  sont sur la circonférence Z définie par (8). Mais tous les points communs à  $\mathcal{C}$  et à Z, vérifiant (7) et (8), sont tels que

$Md = MK \cos \varphi$ ; donc ce sont les points communs à  $Z$  et à  $\Lambda$  ou à la droite  $\Lambda'$  symétrique de  $\Lambda$  par rapport à  $d$ .

Faisons tendre  $\Lambda$  vers  $D$ , donc  $K$  vers  $H$  et  $\varphi$  vers zéro;  $Z$  tend vers  $\Gamma$ . Les deux sécantes communes à  $Z$  et  $\mathcal{C}$  tendent vers  $D$ , les quatre points communs à ces deux courbes tendent deux à deux vers les points  $M$  et  $M'$  de rencontre de  $\Gamma$  et de  $\mathcal{C}$ .

On devine ainsi que ces deux courbes sont tangentes en  $M$  et  $M'$ ; pour le démontrer, précisons. Soit  $M_0$  un point de  $\mathcal{C}$ , choisissons  $\Lambda$  passant par  $M$  et par le symétrique de  $M_0$  par rapport à  $d$ ,  $\Lambda'$  passe donc par  $M_0$ . Si l'on fait tendre  $M_0$  vers  $M$ ,  $\Lambda$  tend vers  $D$ ,  $Z$  vers  $\Gamma$ ; les deux rayons de  $Z$  aboutissant en  $M$  et  $M_0$ , tendent tous deux vers  $\Omega M$  ainsi que la bissectrice intérieure de leur angle. Donc  $MM_0$ , qui est perpendiculaire à cette bissectrice, a une position limite, c'est-à-dire que  $\mathcal{C}$  a une tangente, et cette tangente est la perpendiculaire à  $\Omega M$ .

Donc, *en chaque point  $M$  de  $\mathcal{C}$ , il existe une tangente qui est la droite  $\Gamma$  ayant fourni  $M$ , si  $\Gamma$  est une droite, et qui est, dans le cas général, la tangente en  $M$  au cercle  $\Gamma$  ayant fourni ce point.*

Soit  $MT$  cette tangente,  $T$  étant sur  $d$ . La circonférence de diamètre  $MT$  étant orthogonale en  $M$  à  $\Gamma$  et passant par  $H$  est orthogonale à toutes les circonférences du faisceau  $H, \Gamma$ , donc à  $\gamma$ . Ainsi: *la portion de tangente  $MT$  comprise entre un point  $M$  de  $\mathcal{C}$  et la droite  $d$  est le diamètre d'une circonférence orthogonale à  $\Gamma$ . Cette propriété, quand  $\Gamma$  est un cercle point, est bien connue: la portion de tangente à une conique comprise entre le point de contact et une directrice est vue du foyer correspondant sous un angle droit; nous la retrouverons.*

Les constructions diverses de la tangente se déduisent facilement de cette propriété qu'on pourra démontrer aussi en recherchant une droite  $\Lambda$  tangente à la circonférence  $Z$  qui lui est associée.

La construction des tangentes peut aussi se déduire de celle des normales. Pour  $k = 1$ ,  $\Gamma$  est l'axe radical de  $\gamma$  et de  $H$ , donc est perpendiculaire à  $\omega H$ , la normale en  $M$  est parallèle à  $\omega H$  et, si  $n$  est le point de rencontre de cette normale et de  $\omega x$ ,  $nM$  et  $\omega H$  sont équipollents. Donc, *dans une courbe  $\mathcal{C}$  parabolique, la sous-normale (projection de  $nM$  sur  $\omega x$ ) est constante et égale à  $\omega d$ .*

Pour  $k \neq 1$ , on a, d'après (11),

$$\frac{\overline{Mn}}{\overline{M\Omega}} = \frac{\overline{H\omega}}{\overline{H\Omega}} = 1 + \frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{H\Omega}} = 1 - k ;$$

donc, les deux axes  $Ox$ ,  $Oy$  d'une courbe  $\mathcal{C}$  à centre déterminent sur toute normale à cette courbe deux segments  $\overline{Mn}$ ,  $\overline{M\Omega}$  dont le rapport est constant et égal à  $1 - k$ .

5. — CERCLES BITANGENTS, CERCLES FOCaux.

Soit  $k \neq 1$ ; à toute parallèle  $D$  à  $\omega x$ , coupant  $d$  en  $H$ , nous associons un cercle  $\Gamma$  grâce à la relation (10), toutes les fois du moins que cette relation donne un lieu ou un point. Ce cercle  $\Gamma$ , qui peut donc être un cercle point<sup>1</sup>, est appelé un *cercle focal*, dont  $D$  est dite la *droite directrice*. Dans les cas où  $D$  et  $\Gamma$  se coupent,  $\Gamma$  est un cercle *bitangent* à  $\mathcal{C}$ .

Soit  $M_1$  un point quelconque, comme (11) et (12) donnent:

$$\frac{\overline{\Omega H}}{1} = \frac{\overline{H\omega}}{k-1} = \frac{\overline{\omega\Omega}}{-k} ,$$

la relation (3) appliquée aux trois cercles  $\gamma$ ,  $\Gamma$ ,  $H$  d'un même faisceau s'écrit:

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) + (k-1) \cdot \mathcal{P}(M_1, \Gamma) - k\mathcal{P}(M_1, H) = 0 ,$$

ou, exprimant  $\mathcal{P}(M_1, H)$  à l'aide de  $M_1d$  et  $M_1D$ ,

$$\left[ \mathcal{P}(M_1, \gamma) - k\overline{M_1d^2} \right] + (k-1) \left[ \mathcal{P}(M_1, \Gamma) - \frac{k}{k-1} \overline{M_1D^2} \right] = 0 .$$

Donc, la courbe  $\mathcal{C}$  est susceptible d'être définie à partir de chaque couple  $\Gamma$ ,  $D$  par la relation:

$$\mathcal{P}(M_1, \Gamma) = K \overline{M_1D^2} ,$$

dans laquelle on a posé:

$$K = \frac{k}{k-1} , \quad \text{ou} \quad \frac{1}{K} + \frac{1}{k} = 1 .$$

<sup>1</sup> On pourrait même sans grande difficulté parler ici de cercles imaginaires à centres réels.