CHARLES STURM ET SON ŒUVRE MATHÉMATIQUE1 (1803-1855)

Autor(en): **Loria, Gino**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-28595

CHARLES STURM ET SON ŒUVRE MATHÉMATIQUE [1]

(1803-1855)

PAR

Gino Loria (Gênes).

C'est le sort des grandes personnalités d'être connues par la généralité des hommes de sciences par une seule partie de leurs travaux. Ainsi Newton est considéré comme l'inventeur du Calcul infinitésimal ou le créateur de la théorie de la gravitation universelle; Cardan par la formule (qui n'est pas même de lui !) de résolution des équations du troisième degré; Lagrange comme inventeur du Calcul des variations ou comme premier auteur d'un traité de Mécanique rationnelle. Toutefois, si on examine avec soin les ouvrages des personnages d'exception, on arrive bien souvent à découvrir que, sous d'autres points de vue, ils surent donner à notre patrimoine intellectuel d'autres contributions dignes de leur renommée. Ainsi Newton perfectionna d'une manière remarquable plusieurs chapitres de la Géométrie; Cardan a fourni des vues très ingénieuses relatives à la théorie générale des équations algébriques; et Lagrange a su transformer la méthode des coordonnées, telles qu'on la trouvait jusqu'à Euler, dans notre Géométrie analytique. La présente étude va prouver qu'un phénomène du même genre est arrivé — toute proportion faite — à Charles Sturm, le mathématicien que tous nos élèves connaissent seulement pour son théorème sur la détermination du nombre des racines réelles d'une équation algébrique à coefficients numériques [2].

---

[1] Nous sommes heureux de pouvoir joindre à cette intéressante Notice un portrait de Sturm; c'est la reproduction du portrait à l'huile peint par D'Albert Durade et donné en 1882 à la Bibliothèque publique et universitaire de la Ville de Genève par Daniel Colladon. — H. Fehr.

[2] Les nombres entre crochets renvoient à la *Liste chronologique des travaux de Ch. Sturm* placée à la fin de cet article.

I. — Débuts d'une carrière.

1. — Jacques-Charles-François Sturm naquit à Genève le 22 septembre 1803, fils de parents protestants originaires de Strasbourg. Dès son enfance il montra des dispositions extraordinaires pour les Sciences comme pour les Langues, la Littérature et l'Histoire; toutefois, à mesure qu'il avançait en âge, il s'adonnait de préférence aux sciences; en conséquence, lorsqu'en 1818 il quitta le Collège pour passer à l'Académie de Genève, il se rangea parmi les élèves de Dufour [1] et de L'Huillier [2], qui ne tardèrent à découvrir dans le nouvel étudiant une intelligence d'élite. La mort de son père (1819) l'obligea, quoique bien jeune, à consacrer une partie de son temps à l'enseignement privé pour aider sa famille dont il était devenu, comme fils aîné, le principal appui. En 1823, il entra comme instituteur dans la famille de Broglie, avec laquelle il se rendit à Paris. Ce séjour dura seulement une année; mais à Paris il revint un an après, en compagnie de son ami d'enfance Daniel Colladon, avec lequel il passa, en communauté de travail scientifique, la période 1825-29.

2. — Mais, même bien avant cette époque, il avait commencé à se faire connaître des géomètres par sa collaboration aux *Annales de Mathématiques* de Gergonne. Cette collaboration consistait au début dans la résolution de questions proposées; et c'est dommage que le système du directeur de rédiger à nouveau les communications de ses correspondants en mêlant bien souvent les résultats analogues provenants de sources différentes, rende difficile de connaître exactement la portée des contributions de chaque auteur. Cette remarque trouve tout de suite son application dans le premier article portant la signature de Sturm [1], où se trouvent fondues, pour ne pas dire confondues, deux solutions d'un problème, extension de celui des courbes de poursuite, traité auparavant dans les *Annales de Mathé-*

[1] G. Loria, *Storia della geometria descrittiva* (Milano, Hœpli, 1921), p. 230.
[2] G. Loria, *Storia delle matematiche*, t. III (Milano, 1933), p. 302 et suiv.

matiques (t. XIII, p. 145-162). La même remarque doit être répétée au sujet de la solution, ayant aussi deux pères [2], de la question de déterminer, en fonction des côtés d'un quadrilatère inscriptible, les angles formés par ses côtés opposés et par ses diagonales.

La personnalité de Sturm se dévoile plus clairement dans les démonstrations [4] de deux théorèmes relatifs à la rectification de la lemniscate énoncés par Talbot: elles prouvent les connaissances vastes du jeune auteur sur l'analyse infinitésimale. Un autre article [8] se rapporte à la détermination de l'équation d'une surface, qui est un cylindre du troisième degré; tandis que le suivant [9] donne la solution d'un problème proposé par Sturm lui-même: il appartient à la Mécanique (et précisément au mouvement d'un fil pesant) et doit être remarqué comme la première contribution donnée par Sturm à une branche de mathématiques dont il devait s'occuper, on peut dire, toute sa vie (comp. n. 16). Ensuite notre jeune mathématicien commence à jouer un rôle plus personnel en proposant (*A. M.*, t. XIV, p. 28) la recherche du lieu des points dans le plan d'un triangle jouissant de la propriété que les pieds des perpendiculaires abaissées sur ses côtés forment un second triangle d'aire donnée; non seulement il a effectué lui-même cette recherche [7], mais il a remarqué, sans toutefois le prouver, que la question analogue relative à un polygone quelconque mène, non à un cercle, mais à une section conique; au contraire il prouve [10] que sa solution citée mène tout naturellement à la relation $D^2 = r^2 - 2rr'$ qui a lieu entre les rayons r et r' des cercles inscrit et circonscrit à un triangle et la distance D entre leurs centres. Notons seulement en passant les démonstrations [11] données par lui de quatre théorèmes relatifs à l'hyperbole, car elles sont mêlées à celles d'autres collaborateurs des *Annales*.

II. — Recherches de Géométrie.

3. — Nous nous sommes arrêtés à ces premiers travaux, non à cause de leur importance, mais pour faire connaître à nos lecteurs les premiers pas d'une marche glorieuse. Les démons-

trations analytiques que Sturm donna [6] de théorèmes qu'il avait découverts lui-même ont une valeur plus grande. Voici les énoncés de ces théorèmes:

I. « Soit dans l'espace un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, de n côtés ABC ... LMN et une droite indéfinie, aussi quelconque. Soient menés par cette droite et par les n sommets du polygone un pareil nombre de plans; chacun d'eux par ses n — 2 intersections avec les côtés du polygone non adjacents au sommet qui s'y trouve contenu, déterminera sur chacun de ces côtés deux segments comptés de cette intersection aux deux extrémités de ce côté. Or si l'on forme les produits des segments déterminés sur les côtés consécutifs AB, BC, CD, ..., LM, MN, NA à partir des sommets A, B, C, ..., L, M, N respectivement, lesquels sont au nombre de n (n — 2), ce produit se trouve égal à celui des segments restant déterminés sur les mêmes côtés à partir des sommets B, C, D, ..., M, N, A respectivement, lesquels sont aussi au nombre de n (n — 2). »

II. « Etant donné le même polygone considéré ci-dessus et un point quelconque de l'espace, soient menés par ce point et par les n côtés du polygone un pareil nombre de plans. Chacun de ces plans, par ses n — 3 intersections avec les côtés du polygone, autres que celui qui s'y trouve contenus et les deux autres que celui qui s'y trouve situé, déterminera sur chacun de ces n — 3 côtés deux segments comptés de cette intersection aux deux extrémités de ce côté. Or si l'on forme le produit des segments déterminés sur les côtés consécutifs AB, BC, CD, ..., LM, MN, NA à partir des sommets A, B, C, ..., L, M, N respectivement, ce produit se trouve égal à celui des segments respectifs restants, déterminés sur ces mêmes côtés à partir des points B, C, D, ..., M, N, A respectivement. »

Est-il nécessaire de remarquer que ces théorèmes appartiennent à un chapitre de la Géométrie qui était à l'ordre du jour dans le premier quart du XIX^e siècle ? Sturm continua à s'occuper des polygones — et précisément des polygones réguliers — à l'occasion d'un théorème énoncé par son maître L'Huillier dans la *Bibliothèque universelle* de Genève.

En effet, dans un autre mémoire [13] il établit les propositions suivantes: « Le lieu des points du plan d'un polygone régulier de n côtés desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ces côtés la somme des $2m$-ièmes puissances des longueurs de ces perpendiculaires est constante, est une circonférence concentrique au polygone toutes les fois que le degré m est inférieur à n ». Ce remarquable résultat appartient à Sturm lui-même qui, après l'avoir établi, remarqua l'étrange condition $m < n$; lorsqu'elle n'est pas remplie, le lieu est tout à fait différent du cercle. Ensuite il prouva, d'après L'Huillier, que, étant donné un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, on arrive encore à une circonférence concentrique au polygone lorsqu'on considère le lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées sur ses côtés, soit les sommets d'un polygone d'aire constante et que la même chose doit se répéter lorsqu'on suppose constante la somme des carrés des côtés du polygone résultant. Le mémoire finit par cet autre énoncé: « Une circonférence concentrique à un polygone régulier donné de n côtés est le lieu géométrique des points de chacun desquels menant des droites à ses sommets, la somme des $2m$-ièmes puissances des longueurs de ces droites est une grandeur constante, pourvu qu'on ait $2m < n$ » [1].

4. — Les polygones plans et gauches généraux (c'est-à-dire ne jouissant d'aucune particularité) sont le sujet d'un autre travail de Sturm [14] où l'analyse de Descartes est savamment appliquée. Le point de départ choisi par l'auteur est un système de formules qui servent à relier les coordonnées orthogonales (x_i, y_i, z_i) des sommets d'un polygone quelconque de n côtés aux longueurs r_i des côtés et aux angles α_i, β_i, γ_i qu'ils forment avec un système d'axes coordonnés; il s'agit des formules suivantes:

$$x_i = x_{i+1} + r_{i+1} \cos \alpha_{i+1}\,, \qquad y_i = y_{i+1} + r_{i+1} \cos \beta_{i+1}\,,$$
$$z_i = z_{i+1} + r_{i+1} \cos \gamma_{i+1} \qquad (\text{ou } i = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n)\,.$$

Les applications se rapportent en partie à la géométrie, mais aussi à la mécanique et cela pour arriver à établir des propositions

---

1 Ces théorèmes mériteraient une étude approfondie du point de vue des mathématiques modernes.

énoncées auparavant dans les *Annales;* il faut encore signaler la voie nouvelle et lumineuse par laquelle Sturm arrive aux formules de transformation des coordonnées cartésiennes obliques et d'autres considérations qu'on pourrait bien utiliser encore dans l'enseignement de la géométrie analytique, au moins comme source de questions intéressantes.

5. — L'analogie des sujets nous a obligés à abandonner dans notre exposé l'ordre chronologique; en effet, Sturm avait auparavant publié dans les *A. M.* un remarquable article [5] se rapportant à la théorie des *maxima* et *minima*, ayant pour but de généraliser des résultats publiés en différents endroits du recueil cité. A cet effet il établit, par des calculs d'une élégance parfaite, le théorème général suivant: « Soient p, p', p'', ... les distances d'un point M à des points fixes dans l'espace; q, q', q'', ... les distances du même point à des points mobiles sur des lignes fixes; enfin r, r' r'', ... ses distances à des points mobiles sur des surfaces fixes. Supposons que ce point M soit choisi dans l'espace de façon qu'une fonction déterminée u des distances p, p', p'', ... q, q', q'', ..., r, r', r'', ... soit un *maximum* ou un *minimum* et concevons ce même point sollicité, suivant les directions de ces distances, par des forces proportionnelles aux valeurs actuelles des dérivées partielles de u prises par rapport à ces mêmes distances; alors: 1° Les droites q, q', q'', ..., r, r', r'', ... seront respectivement normales aux lignes et surfaces où elles se terminent; 2° Si le point M est parfaitement libre dans l'espace, il devra se trouver en équilibre sous l'action des forces que nous avons supposé le solliciter; et s'il est assujetti à se trouver sur une surface ou sur une ligne donnée, la résultante de ces mêmes forces, lorsqu'elle ne sera pas nulle, devra être normale à cette surface ou à cette ligne; de sorte qu'on pourra dire que le point M est en équilibre ».

6. — L'auteur — pas encore illustre — s'appliqua plus tard à un chapitre de l'Optique géométrique, qui était alors en état de développement: la théorie des caustiques [12]. Dans le premier mémoire qu'il consacra à ce sujet il démontra que, lorsque le miroir est un cercle qui se trouve dans le plan qui contient la

source lumineuse, les rayons réfractés sont normaux à une courbe telle que les distances d'un quelconque de ses points à deux points fixes multipliés par des coefficients constants donnent une somme aussi constante (on sait qu'il s'agit des *ovales de Descartes*). De cette manière Sturm donna une première confirmation à l'idée de Gergonne qu'il y a avantage à considérer, non les caustiques elles-mêmes, mais leurs développées (ce sont les courbes que Quetelet appela plus tard « caustiques secondaires »).

Or, pendant que Sturm s'occupait de cette théorie, un autre jeune homme, destiné à devenir une des gloires de la Belgique, A. Quetelet, faisait accomplir à la même question un progrès de premier ordre, qui apportait une confirmation éclatante aux vues de Gergonne, et s'empressait d'en faire part au directeur des *Annales de Mathématiques*. Celui-ci, de son côté, la communiquait oralement à son ami P. F. Sarrus, professeur à l'Université de Strasbourg. De cet entretien sortit l'article ayant comme titre *Recherches d'analise* (sic) *sur les caustiques planes*, que Gergonne publia dans le t. XV (p. 345-358) des *Annales*, où, entre autre, il établit le théorème suivant (et l'analogue relatif à la réflexion): « La caustique par réfraction, pour une courbe plane quelconque, séparatrice de deux milieux, et pour des rayons incidents normaux à une autre courbe quelconque, située dans le même plan que celle-là, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice, et dont les rayons sont aux distances de ces mêmes centres à la courbe à laquelle tous les rayons incidents sont normaux, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence ». De ce théorème, démontré analytiquement, Gergonne fit plusieurs applications dans ses *Recherches d'analise* (sic) *sur les surfaces caustiques* (*Annales*, t. XVI, p. 1-19) qui en confirmèrent la fécondité. Frappé par la beauté de ces résultats, Sturm reprit ses recherches sur les caustiques [15] en prenant comme point de départ le théorème principal de Gergonne, qu'il préféra énoncer sous la forme suivante: « A chaque trajectoire orthogonale des rayons incidents, il répond toujours une trajectoire orthogonale des rayons réfractés, telle que, de quelque point de la courbe séparatrice des deux milieux que l'on mène des normales aux deux trajectoires, les longueurs de ces normales seront respectivement entre elles dans le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réflexion ». Or Sturm, par des calculs simples et d'une parfaite élégance, non seulement démontra rigoureusement des formules d'optique géométrique que Jean Bernoulli avait établis par des considérations infinitésimales, mais il établit une propriété remarquable relative à la rectification des caustiques, qu'il énonça comme il suit: « Si on suppose que la caustique des rayons incidents soit rectifiable et que la courbe séparatrice soit algébrique, la caustique des rayons réfractés sera également algébrique et rectifiable ». On déduit de cela que, en particulier, si des rayons incidents parallèles ou émanés d'un même point et compris dans un même plan, subissent une suite de réflexions et de réfractions, à la rencontre de courbes algébriques quelconques, situées dans ce plan, les caustiques auxquelles ils donneront naissance, depuis la première jusqu'à la dernière, seront toutes algébriques et rectifiables.

7. — Depuis ce moment Sturm abandonna l'Optique géométrique à laquelle il devait revenir plus tard (voyez n. 17) et fournit aux *Annales* une dernière contribution, relative à une branche des mathématiques à laquelle il donnait alors un adieu définitif: la vieille et inépuisable théorie des coniques [16 et 17]. Le travail dont il s'agit embrasse deux parties; une troisième a été trouvée parmi ses papiers après sa mort, mais elle n'a jamais été publiée. Dans la première partie, il esquissa une théorie de la polarité par rapport à une courbe du second ordre différente de celle en usage alors, car elle a son point de départ dans la considération des ∞' coniques qui passent par quatre points fixes; à remarquer plusieurs constructions relatives, obtenues en employant seulement la règle (condition qui était alors de mode). Or la dite considération a permis à notre géomètre d'arriver (dans la deuxième partie de son travail) à un résultat entièrement nouveau et qui, grâce à son importance, entra tout de suite dans l'ensemble des propositions fondamentales de la théorie des sections coniques; c'est la proposition qui apprend que toutes les lignes du second ordre qui passent par quatre points fixes déterminent une involution sur une transversale arbitraire située dans leur plan. L'importance de ce résultat n'a pas échappé à

CHARLES STURM

1803–1855

vide-leer-empty

Sturm, qui en déduisit une foule de conséquences, parmi lesquelles on ne doit pas oublier des constructions d'une élégance parfaite. Tout cela fait regretter que la dernière partie de ce travail n'ait jamais vu le jour (Liouville au moment de la mort de Sturm s'était engagé à le publier); on sait seulement [1] qu'on y trouvait la démonstration du théorème suivant corrélatif à celui que nous avons cité: Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les droites menées d'un point quelconque à ses quatre sommets et les tangentes menées de ce point à la courbe, forment un faisceau en involution.

III. — Suite de la biographie de Sturm.

8. — Un an après son premier séjour à Paris, Sturm y revient avec son ami d'enfance Daniel Colladon, avec lequel il vit et travailla plusieurs années: c'est à cette collaboration que doit la vie le *Mémoire sur la compression des liquides*, auquel l'Académie des Sciences décerna (11 juin 1827) le Grand Prix des Sciences mathématiques [2]. Pendant la période 1825-29 Sturm fut encore obligé pour vivre à se vouer à l'enseignement privé, une chaire publique lui étant impossible car il était de religion protestante. Dans cette période économiquement difficile, il fut puissamment aidé par Arago, grâce auquel il fut admis dans le petit cercle qui se réunissait alors autour de Fourier, qui aimait à initier des jeunes auditeurs à ses propres recherches. C'est en subissant l'influence de cet éminent savant que Sturm dirigea ses efforts sur la Théorie mathématique de la chaleur et sur la Théorie générale des équations algébriques; mais c'est au cours d'investigations sur les propriétés d'une classe d'équations différentielles qu'il fit la découverte de son célèbre théorème. Cette proposition fut communiquée à l'Académie des sciences dans la séance du 13 mai 1829, elle fut publiée en résumé dans le *Bulletin*

---

[1] M. Chasles, *Aperçu historique, etc.*, II éd. (Paris, 1875), p. 341.

[2] Les deux jeunes savants firent sur ce sujet des expériences sur le lac de Genève: comp. *La science, ses progrès, ses applications* (Paris, Larousse), t. I, p. 17.

de Ferussac de la même année [19] (il en était alors un des collaborateurs ordinaires) et peu après (1832) dans l'*Algèbre* de Chuquet et Mayer. Cette découverte plaça tout de suite son auteur au rang des premiers géomètres de son temps et lui valut le Grand Prix des Sciences mathématiques, que lui décerna l'Académie des sciences dans sa séance du 4 décembre 1834, et ensuite (1840), la Médaille Copley de la Société royale de Londres. Entre temps (1830) il se lia à Liouville d'une amitié qui dura jusqu'à la mort et qui fut extrêmement utile à la science, comme le prouvent les travaux qui portent les signatures des deux célèbres savants [1]. La révolution de Juillet fut favorable à Sturm, car elle rendit possible son admission dans l'instruction publique: en effet, à la fin de l'année 1830, la haute protection d'Arago lui fit obtenir la chaire de mathématiques spéciales au Collège Rollin. Le 9 mars 1833, il se naturalisa français. Dès ce moment les seuls événements remarquables de l'existence de notre géomètre sont les distinctions qui lui furent décernées: en 1836, il fut nommé membre de l'Académie des sciences à la place d'Ampère; deux ans après il entra à l'Ecole Polytechnique comme Répétiteur d'Analyse et à la mort de Poisson (1840), il y occupa la chaire de Mécanique rationnelle. La trop forte application mina sa forte constitution; c'est en 1851 que sa santé manifesta une altération profonde, qui eut pour déplorable conséquence sa mort à l'âge de 52 ans (18 décembre 1855). Sturm fut non seulement un savant de premier ordre; il fut encore un professeur hors ligne. Ses Cours d'Analyse [40] et de Mécanique [41] à l'Ecole Polytechnique sont un modèle de clarté et de rigueur; pendant plus d'un demi-siècle ils jouiront d'une grande renommée et ils exercèrent une influence bienfaisante en France et à l'étranger. Mais ils ne suffisent pas à fournir un tableau complet de son œuvre didactique, car on lui doit nombre de belles démonstrations ou solutions de problèmes classiques qui, répandues par ses élèves, se trouvent dans plusieurs livres d'enseignement après avoir perdu leur marque de fabrique.

---

[1] Comp. mon essai sur *Le mathématicien Liouville et ses œuvres* (*Archeion*, t. XVIII, 1936, p. 117-139).

IV. — Le théorème de Sturm.

9. — Revenons aux travaux de notre géomètre. Par le théorème sur les équations algébriques qu'il a découvert, il eut le bonheur de rencontrer une de ces vérités éternelles qui sont destinées à traverser les siècles avec le nom de celui qui les aperçut le premier. Quoiqu'il soit généralement connu, nous croyons de notre devoir d'historien d'en rapporter ici l'énoncé: « Soit $V = 0$ une équation algébrique en x et V_1 la fonction dérivée de V; à l'aide de la division algébrique on forme cette suite d'égalités:

$$V = V_1 Q_1 - V_2 , \quad V_1 = V_2 Q_2 - V_3 , \dots , \quad V_{r-2} = V_{r-1} Q_{r-1} - V_r .$$

Soient A, $B > A$ deux nombres réels quelconques; substituons à la place de x le nombre A dans la série de fonctions $V, V_1, \dots, V_r$ et écrivons par ordre sur une même ligne les signes des résultats et comptons le nombre des variations qui se trouvent sur cette ligne de signes. On fera la même opération avec le nombre B; le nombre de variations dans ce cas sera toujours plus grand que dans le cas précédent et la différence sera égale au nombre des racines de l'équation donnée qui appartiennent à l'intervalle $A \dots B$ ». La question résolue par ce théorème se rapporte à un sujet qui était à l'ordre du jour au commencement du XIX^e siècle; Fourier s'en occupait depuis nombre d'années et fit connaître à Sturm ses résultats [1]; Budan, de son côté, était arrivé aux mêmes résultats que Fourier [2]; or le théorème de Sturm a une supériorité marquée sur le théorème Fourier-Budan car il donne *exactement* le nombre des racines de l'équation consi-

[1] Les rapports entre Sturm et Fourier se trouvent clairement caractérisés par Sturm lui-même dans son article [19] du *Bulletin de Ferussac*, où on lit la déclaration suivante: « L'ouvrage qui doit renfermer l'ensemble de ses » (de Fourier) « travaux sur l'Analyse algébrique n'a pas encore été publié. Une partie du manuscrit qui contient ces précieuses recherches a été communiquée à quelques personnes. M. Fourier a bien voulu m'en accorder la lecture et j'ai pu l'étudier à loisir. Je déclare donc que j'ai eu pleine connaissance de ceux des travaux inédits de M. Fourier qui se rapportent à la résolution des équations, et je saisis cette occasion de lui témoigner la reconnaissance dont ses bontés m'ont pénétré. C'est en m'appuyant sur les principes qu'il a posés et en imitant ses démonstrations que j'ai trouvé les nouveaux théorèmes que je vais énoncer ».

[2] Voyez ma *Storia delle matematiche* (t. III, p. 413).

dérée appartenant à un intervalle donné. Il a été étudié et commenté, on a essayé d'en étendre la portée, mais on n'a rien trouvé (et il y a un siècle qu'il a été découvert) qui lui fasse perdre la place qu'il occupa dès son apparition. Ajoutons que, dans son mémoire complet sur ce sujet [23], Sturm a indiqué des simplifications qu'on peut lui faire subir dans ses applications et, en finissant, il a remarqué que ses fonctions auxiliaires peuvent être remplacées par d'autres ayant certaines propriétés bien déterminées; enfin (et c'est un point du mémoire de Sturm qui, si je ne me trompe, a échappé à ceux qui vinrent après lui) dans une addition au résumé qu'il a donné de son travail dans le *Bulletin de Ferussac* [19], il affirma que les mêmes principes peuvent s'appliquer à certaines classes d'équation transcendantes, laissant à sa postérité (qui, à ce que je crois, n'est pas encore apparue) de caractériser ces nouvelles équations.

10. — Il était bien naturel que les applications de la nouvelle proposition se soient multipliées et on ne doit pas s'étonner que les mathématiciens aient tout de suite fixé leur attention sur les plus simples équations algébriques d'un degré quelconque, c'est-à-dire sur les équations binômes. Une simple mention de cette application se trouve dans la troisième édition de l'*Algèbre* de Lefébure de Fourcy, qui dans une note (p. 487), a énoncé une proposition qui se rapporte à l'équation qu'on obtient d'une équation de la forme $\frac{x^{2m+1}-1}{x-1}=0$, en faisant $x+\frac{1}{x}=y$. Cette proposition a été établie par un ancien élève de l'Ecole Polytechnique (M. Gascheau), dans un mémoire du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (t. VII, pp. 126-132); elle attira l'attention de Sturm, qui s'empressa d'apporter [34] une simplification à la démonstration proposée.

Il est intéressant de remarquer que notre mathématicien démontre son théorème par un raisonnement lumineux, presque sans calcul. Or un des premiers géomètres qui l'étudia, s'occupa de préférence d'exprimer ses fonctions auxiliaires (qui sont des fonctions symétriques des racines de l'équation considérée), en fonction de ces racines. C'est dans une note publiée par Sylvester dans le cahier de décembre 1839 du *Philosophical Magazine*, qu'on rencontre pour la première fois les expressions suivantes des fonctions de Sturm relatives à une équation $V = 0$ ayant pour racines les nombres réels a, b, ..., h:

$$V_1 = \Sigma (x - b)(x - c) \dots (x - h)$$

$$V_2 = \frac{1}{m^2} \Sigma (a - b)^2 (x - c) \dots (x - h)$$

$$V_3 = \frac{1}{\lambda_3} \Sigma (a - b)^2 (a - c)^2 (b - c)^2 (x - d)(x - e) \dots (x - h)$$

$$V_4 = \frac{1}{\lambda_4} \Sigma (a - b)^2 (a - c)^2 (a - d)^2 (b - c)^2 (b - d)^2 (c - d)^2 (x - e) \dots (x - h)$$

. . . .

$$V_m = \frac{1}{\lambda_m} (a - b)^2 (a - c)^2 \dots (a - h)^2 (b - c)^2 \dots (g - h)^2$$

les λ étant des coefficients dont l'auteur anglais ne donne pas les expressions générales. Ces expressions ont été découvertes par Sturm lui-même dans un remarquable mémoire [35] où les formules de Sylvester sont établies et complétées par la détermination des constantes λ; il est bon d'ajouter que Liouville montra tout de suite (*Journ. de math. pures et appl.*, t. VII, p. 528) qu'on peut arriver au même résultat à l'aide d'une formule donnée par Cauchy dans son *Cours d'Analyse algébrique* [1].

V. — Suite des travaux sur la théorie des équations.

11. — A la même période de l'activité de Sturm appartiennent deux mémoires présentés à l'Académie des Sciences, mais dont on ne connaît que les courts résumés publiés dans le *Bulletin de Ferussac*. Dans l'une [20], il applique un procédé, dont s'est servi Fourier dans ses recherches sur les équations numériques, pour déterminer les valeurs réelles et positives de x satisfaisant à une équation de la forme

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \dots + Mx^{\mu} = 0$$

où les coefficients A, B, C, ... M sont des nombres donnés et les exposants α, β, γ, ..., μ sont des nombres réels quelconques,

[1] Pour une bibliographie assez riche relative au théorème de Sturm, nous renvoyons nos lecteurs à un article de M. Lecat dans le t. II (2^{me} sér.), 1923, de *L'Intermédiaire des mathématiciens*.

rationnels ou irrationnels. Ces équations se rencontrent dans certaines questions de Physique mathématique. La même chose peut se répéter par rapport aux équations étudiées par notre géomètre dans l'autre des mémoires cités [21]. Dans ce travail l'auteur démontre avant tout, de deux manières originales, la réalité des racines de certaines équations transcendantes; ensuite il détermine les coefficients constants des séries qui représentent une fonction arbitraire entre des limites données. Malheureusement dans les papiers qu'il a laissés, on n'a pas trouvé le texte complet de ces mémoires, ni même quelques lignes capables de combler cette lacune (et ce n'est pas la seule) que présente le tableau de sa production scientifique.

12. — Si au lieu d'une fonction algébrique on égale à zéro une fonction quelconque d'une variable complexe, l'analogie avec la question résolue par le théorème de Sturm fait naître le problème de déterminer combien de zéros de l'équation résultante tombent dans une portion déterminée du plan. C'est Cauchy qui l'a résolue par le théorème général suivant: « Soit $f(z) = P + iQ$ une fonction de la variable $z = x + iy$, P et Q étant des fonctions réelles des x et y. Traçons dans le plan des axes rectangulaires un contour quelconque qui ne passe par aucun des points-racines de l'équation $f(z) = 0$, auquel cas le rapport P/Q aura en chaque point du contour une valeur déterminée. Si l'on suit le contour considéré en partant d'un quelconque de ses points et en marchant toujours dans le même sens jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ, le rapport P/Q prendra diverses valeurs et il passera par zéro chaque fois que P sera nul, tandis qu'il deviendra infini lorsque Q s'annulera. Cela posé, soit k le nombre des fois que ce rapport, en s'évanouissant et en changeant de signe, passe du positif au négatif et k' le nombre de fois que le même rapport s'évanouissant et changeant de signe passe du négatif au positif; le nombre k ne sera jamais inférieur à k' et l'excès $\Delta = k - k'$ sera toujours égal au double du nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ comprises dans la partie du plan limitée par le contour considéré ». Comme la démonstration donnée par Cauchy de ce beau théorème est basée sur l'emploi des intégrales définies et du calcul des résidus, il était bien

naturel d'essayer de l'établir par des raisonnements élémentaires: c'est ce que se proposèrent de faire les deux amis Sturm et Liouville et ils arrivèrent au but [25] d'une manière tellement satisfaisante que la démonstration proposée ne tarda pas à prendre place dans un célèbre ouvrage destiné à l'enseignement [1].

Le raisonnement conçu par les deux illustres géomètres ne suppose pas la connaissance du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques; même, cette proposition apparaît comme conséquence du théorème de Cauchy. Mais si on le suppose connu, ce théorème peut s'établir à l'aide d'un nouveau raisonnement que Sturm a exposé dans un autre mémoire [26]. Ajoutons que, dans la dernière section de ce travail, l'auteur est revenu sur la supposition de ne pas se servir du théorème fondamental cité et, il a montré qu'on peut arriver à celui de Cauchy par une voie qui a l'avantage de pouvoir s'appliquer aux équations transcendantes et même sans supposer qu'on raisonne sur une équation à coefficients réels. C'est notre devoir d'ajouter que, dans les dernières pages de cet important travail, l'auteur s'arrêta à exposer des détails de calcul relatifs à la détermination du nombre Δ lorsque l'équation considérée est algébrique, ce qui est le cas intéressant en général.

13. — Sturm et Liouville étaient encore occupés par la rédaction des travaux que nous venons d'examiner lorsque Cauchy publia dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 8 mai 1873 [2]), une note contenant des extraits de deux lettres, la première datée de Turin, 15 juin 1833, la seconde de Göritz, 22 avril 1837, destinées à faire connaître un théorème relatif au nombre des racines, qui tombent dans un domaine déterminé du plan, d'un système de deux équations à deux inconnues, théorème que le grand géomètre avait d'abord tiré de la notion d'« index intégral », mais qu'il établit aussi par d'autres considérations. Ce travail attira tout de suite l'attention des deux amis, qui dans la séance du 15 mai 1837 [28] donnèrent avant tout au nouveau théorème de Cauchy la forme suivante:

---

[1] J. A. Serret, *Cours d'Algèbre supérieure* (IV^e éd., Paris, 1877), p. 118 et suiv.

[2] *Comptes rendus*, t. IV, p. 674-77, ou bien *Œuvres complètes de Cauchy*, t. IV (Paris, 1884), p. 45-8.

Désignons par P et Q deux fonctions entières et par R la quantité $\frac{dP}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy}\frac{dQ}{dx}$; on peut regarder x et y comme représentant les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M du plan; traçons sur le plan des xy un contour fermé quelconque ABC; pour chaque point de ce concours la fraction P/RQ aura en général un signe déterminé. Désignons par Δ l'excès du nombre des fois où la fraction P/RQ en s'évanouissant passe du positif au négatif sur le nombre des fois où elle passe du négatif au positif, lorsqu'on parcourt d'un mouvement continu le contour en allant des x positifs aux y positifs. Désignons en même temps par μ le nombre des solutions réelles des équations $P = 0$, $Q = 0$ qui sont contenues dans l'intérieur du contour ABC; suivant Cauchy on a toujours $\mu = \frac{1}{2}\Delta$. Or, à l'aide de trois exemples, Sturm et Liouville prouvèrent que ce théorème *ne subsiste pas en général* et ils proposèrent de lui substituer le suivant: « Aux hypothèses exposées ajoutons celle que, sur le contour ABC, P et Q ne s'annulent pas à la fois et que dans l'intérieur de ce contour les valeurs de x, y qui annulent P et Q donnent pour R une valeur différente de zéro. Parmi les solutions des équations $P = 0$, $Q = 0$, contenues dans ce contour les unes peuvent correspondre à une valeur positive, les autres à une négative de R; désignons par μ_1 le nombre des solutions de la première espèce et par μ_2 le nombre des solutions de la seconde espèce: on aura $\Delta = 2(\mu_1 - \mu_2)$, Δ représentant l'excès du nombre des fois où la fraction P/Q passe du positif au négatif sur le nombre des fois où elle passe du négatif au positif quand on parcourt le contour ABC de la manière indiquée ». Suivant les auteurs cités ce nouveau théorème s'établit aisément à l'aide des mêmes principes qu'ils employèrent dans leur mémoire [25] sur le théorème de Cauchy.

Le célèbre géomètre (qui se trouvait alors hors de Paris), dès qu'il connut ces remarques, s'empressa de les examiner avec la plus admirable objectivité; comme résultat de cet examen nous avons une note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 3 juillet 1837 [1], dans laquelle il reconnaît franchement

[1] *Comptes rendus*, t. VI, p. 6-8, ou bien *Œuvres complètes de Cauchy*, t. IV, p. 81-83.

que ses jeunes critiques avaient parfaitement raison; il ajouta de précieux renseignements sur le développement de ses idées relatives à la distribution dans le plan complexe des racines d'une équation algébrique; et, de la sorte, il fit monter sa note bien au-dessus d'une pièce douée seulement d'un but polémique.

VI. — Équations différentielles.

14. — Une autre branche des mathématiques pures dans laquelle Sturm se présente aux yeux de l'historien comme un véritable législateur est la théorie des équations différentielles. Le mémoire qui lui donne droit à cette place a été présenté à l'Académie des Sciences le 28 septembre 1833, mais il n'a été publié que trois ans après [24]. Dans ce travail sont étudiées les équations de la forme

$$\mathrm{L}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \mathrm{M}\frac{d\mathrm{V}}{dx} + \mathrm{NV} = 0$$

où L, M, N sont des fonctions données de la variable x et V la fonction inconnue; c'est à l'intégration de cette équation que se ramène la résolution d'un grand nombre de problèmes de la Physique mathématique; cette intégration est impossible en général; mais on peut (et voilà l'idée originale de Sturm !) déterminer également les propriétés essentielles de l'intégrale V. Si cette idée, qui apparaît aujourd'hui bien naturelle, ne s'est pas présentée auparavant c'est à cause du préjugé, qui commença à paraître au cours du XVIIIe siècle, que toute question d'analyse devait et pouvait être résolue par une des fonctions connues (polynômes, exponentielles, logarithmes, fonctions circulaires directes et inverses); le mérite de Sturm consiste à avoir montré comment on pouvait arriver à caractériser la fonction intégrale sans supposer d'avance la classe à laquelle elle appartient. Pour arriver à son but il écrivit l'équation donnée sous la forme

$$(\mathrm{I})\ \frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right) + \mathrm{GV} = 0$$

où K et G sont des nouvelles fonctions de x, chose qui est toujours possible à l'aide d'une quadrature, sans toutefois omettre l'observation que c'est sous cette forme réduite que se présentent les équations différentielles rencontrées dans plusieurs questions de Physique mathématique. L'importance de ces recherches a été tout de suite mesurée par Liouville qui lui donna des compléments remarquables dans deux notes présentées à l'Académie des Sciences dans les séances du 30 novembre 1835 et 27 juin 1836 [1]. Malgré les énormes progrès accomplis par l'Analyse dans ce dernier siècle, les procédés de Sturm ont conservé toute leur valeur; pour s'en convaincre il suffit de consulter l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (II. Bd., I. Tl., I. Hälfte, p. 442 et suiv.) et un cours de leçons sur le même sujet tenus par l'éminent auteur cité ci-dessous [2].

15. — L'équation différentielle

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right) + (gV - l) = 0 .$$

se rencontre au début d'un travail dû à la collaboration de Sturm et Liouville, relatif à certains développements en séries, dont on connaît seulement un extrait, présenté à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. IV, p. 675) et reproduit dans le *Journal de mathématiques* [29]; nous regrettons de devoir en conséquence nous borner à dire, sur la foi des illustres auteurs, que la méthode employée pour sommer les séries considérées, étant simple et générale, peut servir à résoudre un grand nombre de questions du même genre.

On éprouve un regret semblable par rapport à un autre mémoire présenté par Sturm à l'Académie des Sciences, mais dont il ne publia qu'un résumé [22]; par ce travail notre mathématicien a complété l'étude des équations différentielles données par Lagrange et Laplace pour déterminer les variations séculaires des éléments de l'orbite d'une planète; ajoutons que ces équations importent pour une autre branche des mathématiques,

---

1 Elles ont été publiées dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* avec les titres suivants: « Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries (*J. M.*, t. I, 1836, p. 255-265) et « Démonstration d'un théorème dû à M. Sturm et relatif à une classe de fonctions transcendantes (*Id.*, p. 269-77).

2 M. Bôcher, *Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes* (Paris, 1917).

car Lagrange avait prouvé qu'elles servent à représenter les petites oscillations d'un système de points matériels assujettis à des liaisons arbitraires. C'est l'étude que fit Sturm de ces équations, qui le mena à découvrir de nouvelles propositions, parmi lesquelles se trouve le théorème sur les équations algébriques qui porte son nom: voilà un nouveau motif pour regretter que ces recherches ne soient connues que d'une manière incomplète !

15 *a.* — Le mémoire sur une classe d'équations à différentielles partielles [27] est sans doute un des plus importants de ceux de notre mathématicien. Il a comme point de départ la considération du problème de la distribution de la chaleur dans une barre droite ou courbe formée d'une matière homogène ou non et d'une épaisseur constante ou variable, mais assez petite pour que tous les points d'une section plane perpendiculaire à l'axe aient la même température au même instant, la barre étant placée dans un milieu de température constante. Toutefois le mémoire a un caractère tout à fait mathématique (Sturm lui-même remarque que les équations de la chaleur ne sont pas d'une exactitude absolue, en conséquence on ne peut pas songer à une vérification expérimentale des résultats de l'analyse) et il regorge d'idées et de méthodes ayant une grande généralité.

Pour résoudre le problème énoncé, Sturm cherche, à l'aide d'une méthode connue, des valeurs particulières de la fonction représentant la température variable d'un point quelconque de la barre, en la supposant de la forme V^{-rt}, V étant une fonction de l'abscisse x et du paramètre r, indépendante du temps. On arrive de la sorte à une équation transcendante en r qui n'a pas de racines imaginaires, ni égales, ni négatives, mais une infinité de racines positives, dont la plus petite peut être égale à zéro dans un cas particulier; en substituant à r une quelconque de ces racines on arrive à une infinité de solutions particulières satisfaisant à l'équation aux différences partielles du problème et aux équations aux limites. Les fonctions V correspondantes aux différentes racines de l'équation transcendante auxiliaire jouissent de plusieurs propriétés remarquables, dont les plus importantes sont les suivantes: *a*) Aucune de ces fonctions ne peut s'évanouir sans changer de signe; *b*) La première de ces fonctions conserve le même signe dans toute l'étendue de la barre; *c*) La seconde change de signe pour un point situé entre les extrémités de la barre, la troisième pour deux, etc.; *d*) Deux fonctions correspondantes à des racines consécutives changent toujours de signe l'une après l'autre alternativement. Ainsi ces fonctions, données par une même équation différentielles linéaire du second ordre contenant un paramètre variable, jouissent de propriétés analogues à celles des sinus des multiples d'un arc. Ensuite Sturm établit des propositions non moins remarquables relatives aux valeurs *maxima* et *minima* des fonctions considérées. Ce ne sont pas les seuls résultats exposés par le célèbre auteur; mais — c'est une remarque de Voltaire — dire tout, c'est la manière sûre d'ennuyer. Toutefois nous ne pouvons pas taire que leur valeur est accrue par la considération qu'ils s'étendent, avec quelque modification, au mouvement linéaire de la chaleur dans un globe ou dans un cylindre composés de couches concentriques infiniment minces, homogènes ou hétérogènes. En dehors de l'importance de ces conclusions, le mémoire dont il s'agit doit être signalé (mais ce serait une remarque à faire sur tous les travaux du grand mathématicien !) pour son style d'une clarté vraiment lumineuse et pour les calculs, dont l'apparence modeste cache la grande profondeur.

VII. — Mécanique.

16. — Les rapports entre l'Analyse et la Mécanique analytique sont si étroits et nombreux qu'on ne doit pas s'étonner si Sturm a su perfectionner dans quelques points de détails une branche des mathématiques à laquelle il s'était intéressé dès sa jeunesse (comp. n. 2) et sur laquelle il nous a laissé un cours de leçons [41] qui a été jugé un des meilleurs entre ceux de son temps. Nous allons dire quelques mots sur ses publications sur la dite matière.

En l'an 1841 il publia un mémoire [30] destiné à déterminer les cas d'applicabilité d'un théorème de Carnot relatif à la perte de force vive qui a lieu dans un système dont certaines parties sont dénuées d'élasticité et changent brusquement de vitesse en se choquant: malheureusement on ne connaît qu'un court résumé de ce travail.

Sept ans après il publia, encore dans les *Comptes rendus* [38], une note d'une extrême élégance ayant pour but d'abréger les calculs par lesquels Hamilton et Jacobi avaient montré que l'intégration des équations du mouvement d'un ou de plusieurs points matériels se ramène à la recherche d'une solution complète quelconque d'une équation à différentielles partielles.

Une note que Sturm publia dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* a un caractère plus élémentaire [39]. Son sujet est le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Poinsot, par des considérations géométriques qui eurent un grand et bien justifié succès, avait alors mis de mode cette question ; Sturm, sans méconnaître le mérite du travail de son éminent collègue, se proposa et réussit à prouver que les mêmes résultats peuvent s'obtenir par des calculs assez simples qu'on peut regarder comme formant la suite naturelle d'un chapitre de la *Mécanique* de Poisson. En finissant il montra que son procédé analytique mène tout naturellement au théorème de Coriolis sur le mouvement d'un point ou d'un système de points animés d'un mouvement connu.

VIII. — Optique et théorie de la vision.

17. — Nous avons vu (n. 6) que Sturm, au début de sa carrière scientifique, s'occupa de la propagation de la lumière, en supposant qu'elle ait lieu dans un plan et de la sorte contribua à la constitution de la théorie des caustiques secondaires. Or, dans son âge mûr, il est revenu sur le même sujet en supposant toutefois (et c'est le cas qui intéresse le physicien) que les rayons de lumière soient répandus dans tout l'espace. C'est le sujet d'un remarquable travail [32] qu'il écrivit après avoir pris connaissance des célèbres recherches de Malus, Dupin et Hamilton. Ayant remarqué que ces auteurs ne cherchèrent pas à déterminer les « surfaces caustiques », engendrées par les intersections successives des rayons de lumière et en généralisant les méthodes analytiques qu'il avait heureusement employées dans

ses études juvéniles, il établit avant tout des formules qui font connaître la direction des lignes de courbure et la grandeur des rayons de courbure principaux de la surface aux rayons réfléchis ou réfractés, en fonction des éléments correspondants de la surface normale aux rayons incidents. L'interprétation géométrique de ces formules conduisit l'auteur à une propriété fort simple des indicatrices de la surface de séparation des milieux et des surfaces respectivement normales aux rayons incidents et aux rayons réfléchis ou réfractés.

Quelques années plus tard, il fit à l'Académie des Sciences trois communications [37] qui prouvent ses profondes connaissances sur l'optique physiologique [1], mais qui intéressent aussi le géomètre, car on y trouve la proposition suivante, qui est considérée comme fondamentale dans la théorie des rayons rectilignes: « Les normales d'une surface en des points infiniment voisins d'un de ses points rencontrent toutes deux droites qui sont perpendiculaires aux plans des deux sections principales menées par les centres de courbure de ces sections ». Ajoutons que dans les mêmes communications on lit la généralisation suivante d'un théorème de J. Bertrand: « Si l'on considère un système de lignes droites disposées dans l'espace suivant une loi analytique quelconque et qui ne soient pas normales à aucune surface, en prenant un point quelconque O dans l'espace et la droite OZ correspondante à ce point, puis portant perpendiculairement à OZ deux longueurs infiniment petites OM, OM′ égales et perpendiculaires entre elles, les angles infiniment petits μ et μ' que forment la droite correspondante au point M avec le plan ZOM, et la droite correspondante au point M′ avec le plan ZOM′, auront leur somme algébrique $\mu + \mu'$ différente de zéro et constante, quelles que soient les directions des deux lignes OM, OM′, pourvu qu'elles soient toujours égales, perpendiculaires l'une à l'autre et à OZ au même point O. A remarquer que la somme $\mu + \mu'$ est nulle dans le seul cas où les droites du système sont normales à une même surface.

[1] Voir les travaux de M. A. GULLSTRAND.

IX. — TRAVAUX DIVERS.

18. — En dehors des recherches par lesquelles Sturm a frayé des routes nouvelles, il y en a d'autres plus modestes qui représentent des contributions de détail à des questions traitées par d'autres mathématiciens. Nous allons en dire, avant de finir, quelques mots.

C. Delaunay s'est le premier occupé de la recherche de la surface de révolution qui est en même temps surface *minima* et il a prouvé qu'elle est engendrée par la courbe décrite par le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole qui roule sans glisser sur une droite; et il est arrivé à ce beau résultat en partant de l'équation différentielle des surfaces *minima* et en introduisant l'hypothèse qu'il s'agissait d'une surface de révolution. Sturm, au contraire [33], partit de la considération d'une surface de révolution quelconque, il calcula le volume qu'elle renferme et enfin il chercha, à l'aide du calcul des variations, dans quels cas ce volume est le plus petit possible. De cette manière il arriva à l'équation différentielle du méridien cherché et il démontra qu'elle appartient à la courbe engendrée par le glissement sur une droite d'une section conique. Il a jouté que dans le cas où la courbe roulante est une parabole, la courbe méridienne est une chaînette. Ensuite il montra comment les considérations exposées permettent encore de déterminer la courbe engendrée dans le mouvement considéré, par le centre de la conique roulante (c'est une courbe plus générale de la courbe élastique) [1]. En s'élevant enfin à des considérations plus générales il a exposé une méthode pour déterminer la courbe qu'il faut faire glisser sur une droite pour qu'un certain point du plan de cette courbe décrive une courbe dont on connaît l'équation différentielle.

Un autre des travaux de second ordre [36] de Sturm a pour objet d'établir à l'aide d'une formule de Gauss l'important théorème suivant, découvert par Chasles: « Si l'on conçoit un canal infiniment étroit dont les arêtes curvilignes soient des trajectoires orthogonales aux surfaces de niveau relatives à un

---

1 Voir le T. II, p. 139, de mon ouvrage *Curve piane speciali*, Milan, Hœpli, 1930.

corps quelconque, les attractions que ce corps exercera sur les éléments des surfaces de niveau interceptées par ce canal auront toutes la même valeur ».

Pour compléter ce rapide exposé des différentes branches des mathématiques qui sont redevables à Sturm de quelque perfectionnement, il faut mentionner un mémoire très étendu sur la communication de la chaleur dans une suite de vases; malheureusement, quoique ce mémoire fut complètement rédigé et prêt à envoyer à l'imprimerie, il n'a jamais vu le jour. C'est donc une nouvelle lacune à ajouter à celles que nous avons remarquées dans la collection des ouvrages de l'éminent géomètre genevois.

Le tableau que nous venons d'esquisser est assez imposant pour prouver que la Suisse française a, de son côté, été en mesure d'ajouter au moins un nouveau nom (et ce n'est pas le seul) à ceux que, de son côté, la Suisse allemande a la gloire d'avoir pu inscrire dans l'Histoire des Mathématiques.

Gênes, mai 1938.

LISTE CHRONOLOGIQUE DES TRAVAUX DE CHARLES STURM

Abréviations: Les périodiques cités sont mentionnés comme suit:

A. M. = Annales de Mathématiques de Gergonne.
B. F. = Bulletin des Sciences mathématiques de Férussac.
C. R. = Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris.
J. M. = Journal de Mathématiques pures et appliquées de Liouville.
N. A. = Nouvelles Annales de Mathématiques.
S. E. = Mémoires des Savants étrangers.

1. — Extension du problème des courbes de poursuite. *A. M.*, t. XIII, 1822-23, p. 289-303.
2. — Déterminer en fonction des côtés d'un quadrilatère inscrit au cercle: 1° l'angle de deux côtés opposés; 2° l'angle des diagonales. *A. M.*, t. XIII, 1822-23, p. 314-318.
3. — Etant donné trois points et un plan, trouver dans ce plan un point tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit un minimum. *A. M.*, t. XIV, 1823-24, p. 13-16.

4. — Démonstration analitique[1] de deux théorèmes sur la lemniscate. *A. M.*, t. XIV, 1823-24, p. 17-23.
5. — Recherches analitiques sur une classe de problèmes de Géométrie dépendant de la théorie des maxima et minima. *A. M.*, t. XIV, 1823-24, p. 108-116.
6. — Démonstration de deux théorèmes de Géométrie énoncés à la page 63 du présent volume. *A. M.*, t. XIV, 1823-24, p. 225-228.
7. — Lieu des points desquels, abaissant des perpendiculaires sur les côtés d'un triangle et joignant les pieds de ces perpendiculaires, on obtienne un triangle d'aire donnée. *A. M.*, t. XIV, 1823-24, p. 286-93.
8. — Recherches de la surface courbe de chaque point de laquelle menant des droites à trois points fixes, ces droites déterminent sur un plan fixe les sommets d'un triangle dont l'aire est constante. *A. M.*, t. XIV, 1823-24, p. 302-307.
9. — Courbure d'un fil flexible et inextensible dont les extrémités sont fixes et dont tous les points sont attirés et repoussés par un centre fixe, suivant une fonction déterminée de la distance. *A. M.*, t. XIV, 1823-24, p. 381-389.
10. — La distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un triangle est moyenne proportionnelle entre le rayon du circonscrit et l'excès de ce rayon sur le diamètre de l'inscrit. *A. M.*, t. XIV, 1823-24, p. 390-391.
11. — Démonstration de quatre théorèmes sur l'hyperbole. *A. M.*, t. XV, 1824-25, p. 100-104.
12. — Recherches sur les caustiques. *A. M.*, t. XV, 1824-25, p. 205-218.
13. — Théorèmes sur les polygones réguliers. *A. M.*, t. XV, 1824-25, p. 250-256.
14. — Recherches analitiques[1] sur les polygones rectilignes plans et gauches. *A. M.*, t. XV, 1824-25, p. 309-344.
15. — Recherches d'Analise[1] sur les caustiques planes. *A. M.*, t. XVI, 1825-26, p. 238-247.
16. — Mémoire sur les lignes du second ordre. Ire partie. *A. M.*, t. XVI, 1825-26, p. 265-293.
17. — Mémoire sur les lignes du second ordre. IIe partie. *A. M.*, t. XVII, 1826-27, p. 173-198.
18. — (Avec D. Colladon.) Mémoire sur la compression des liquides. *S. E.*, t. V, 1834, p. 271-318.
19. — Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques, lu à l'Académie des Sciences le 23 mai 1829. *B. F.*, t. XI, 1829, p. 419-422.
20. — Extrait d'un mémoire présenté à l'Académie des Sciences dans sa séance du 1er juin 1829. *B. F.*, t. XI, 1829, p. 422-425.
21. — Note présentée à l'Académie dans sa séance du 8 juin 1829, p. 425.
22. — Extrait d'un mémoire sur l'intégration d'un système d'équations linéaires. *B. F.*, t. XII, 1829, p. 313-322.
23. — Mémoire sur la résolution des équations numériques. *S. E.*, t. VI, 1833, p. 271-318.

[1] Nous conservons l'orthographe employée constamment dans les *A. M.*

24. — Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre. *J. M.*, t. I, 1836, 106-186.
25. — (Avec Liouville.) Démonstration d'un théorème de Cauchy. *J. M.*, t. I, 1836, p. 278-289.
26. — Autres démonstrations d'un théorème de Cauchy. *J. M.*, t. I, 1836, p. 290-308.
27. — Mémoire sur une classe d'équations différentielles partielles. *J. M.*, t. I, 1836, p. 375-344.
28. — (Avec J. Liouville.) Note sur un théorème de Cauchy relatif aux racines des équations simultanées. *C. R.*, t. IV, Ier sem., 1837; *J. M.*, t. II, 1837, p. 675-677.
29. — (Avec J. Liouville.) Extrait d'un mémoire sur le développement des fonctions en série. *J. M.*, t. II, 1837, p. 220-225.
30. — Mémoire sur quelques propositions de Mécanique rationnelle. *C. R.*, t. XIII, IIe sém., 1841, p. 1046-1051.
31. — Note sur l'intégration des équations générales de la Dynamique. *C. R.*, t. XXVI, IIe sém., 1848, p. 658-666.
32. — Mémoire sur l'Optique. *J. M.*, t. III, 1838, p. 357-384.
33. — Note à l'occasion d'un article de M. Delaunay sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante. *J. M.*, t. VI, 1841, p. 315-320.
34. — Note à l'occasion d'un article de M. Gascheau sur l'application du théorème de M. Sturm aux transformées des équations binômes. *J. M.*, t. VII, 1842, p. 132-133.
35. — Démonstration d'un théorème de M. Sylvester. *J. M.*, t. VII, 1842, p. 356-368.
36. — Note sur un théorème de M. Chasles. *J. M.*, t. VII, 1842, p. 345-355.
37. — Mémoire sur la théorie de la vision. *C. R.*, t. XX, Ier sem., 1845, p. 554-560, 761-767, 1238-1257.
38. — Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. *N. A.*, t. X, 1851, p. 419-432.
39. — Note sur l'intégration des équations générales de la Dynamique. *C. R.*, t. XXVI, IIe sém., 1848, p. 658.
40. — *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique.* Deux volumes, 1re édition publiée par E. Prouhet. A partir de la 8me édition, publiée en 1887 par A. de Saint-Germain, l'ouvrage est adapté aux nouveaux programmes de la Licence; 14me édition en 1909.
Lehrbuch der Analysis, deutsch von Theodor Fischer, Berlin, 1897-98.
41. — *Cours de Mécanique de l'Ecole Polytechnique.* Deux volumes, 1re édition publiée par E. Prouhet, Paris, 1861. 5me édition revue et annotée par A. de Saint-Germain, 1905.