IV. — Le théorème de Sturm.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

IV. — Le théorème de Sturm.

9. — Revenons aux travaux de notre géomètre. Par le théorème sur les équations algébriques qu'il a découvert, il eut le bonheur de rencontrer une de ces vérités éternelles qui sont destinées à traverser les siècles avec le nom de celui qui les aperçut le premier. Quoiqu'il soit généralement connu, nous croyons de notre devoir d'historien d'en rapporter ici l'énoncé: « Soit $V = 0$ une équation algébrique en x et V_1 la fonction dérivée de V; à l'aide de la division algébrique on forme cette suite d'égalités:

$$V = V_1 Q_1 - V_2 , \quad V_1 = V_2 Q_2 - V_3 , \ldots , \quad V_{r-2} = V_{r-1} Q_{r-1} - V_r .$$

Soient A, $B > A$ deux nombres réels quelconques; substituons à la place de x le nombre A dans la série de fonctions $V, V_1, \ldots, V_r$ et écrivons par ordre sur une même ligne les signes des résultats et comptons le nombre des variations qui se trouvent sur cette ligne de signes. On fera la même opération avec le nombre B; le nombre de variations dans ce cas sera toujours plus grand que dans le cas précédent et la différence sera égale au nombre des racines de l'équation donnée qui appartiennent à l'intervalle $A \ldots B$ ». La question résolue par ce théorème se rapporte à un sujet qui était à l'ordre du jour au commencement du XIX^e siècle; Fourier s'en occupait depuis nombre d'années et fit connaître à Sturm ses résultats [1]; Budan, de son côté, était arrivé aux mêmes résultats que Fourier [2]; or le théorème de Sturm a une supériorité marquée sur le théorème Fourier-Budan car il donne *exactement* le nombre des racines de l'équation consi-

---

[1] Les rapports entre Sturm et Fourier se trouvent clairement caractérisés par Sturm lui-même dans son article [19] du *Bulletin de Ferussac*, où on lit la déclaration suivante: « L'ouvrage qui doit renfermer l'ensemble de ses » (de Fourier) « travaux sur l'Analyse algébrique n'a pas encore été publié. Une partie du manuscrit qui contient ces précieuses recherches a été communiquée à quelques personnes. M. Fourier a bien voulu m'en accorder la lecture et j'ai pu l'étudier à loisir. Je déclare donc que j'ai eu pleine connaissance de ceux des travaux inédits de M. Fourier qui se rapportent à la résolution des équations, et je saisis cette occasion de lui témoigner la reconnaissance dont ses bontés m'ont pénétré. C'est en m'appuyant sur les principes qu'il a posés et en imitant ses démonstrations que j'ai trouvé les nouveaux théorèmes que je vais énoncer ».

[2] Voyez ma *Storia delle matematiche* (t. III, p. 413).

dérée appartenant à un intervalle donné. Il a été étudié et commenté, on a essayé d'en étendre la portée, mais on n'a rien trouvé (et il y a un siècle qu'il a été découvert) qui lui fasse perdre la place qu'il occupa dès son apparition. Ajoutons que, dans son mémoire complet sur ce sujet [23], Sturm a indiqué des simplifications qu'on peut lui faire subir dans ses applications et, en finissant, il a remarqué que ses fonctions auxiliaires peuvent être remplacées par d'autres ayant certaines propriétés bien déterminées; enfin (et c'est un point du mémoire de Sturm qui, si je ne me trompe, a échappé à ceux qui vinrent après lui) dans une addition au résumé qu'il a donné de son travail dans le *Bulletin de Ferussac* [19], il affirma que les mêmes principes peuvent s'appliquer à certaines classes d'équation transcendantes, laissant à sa postérité (qui, à ce que je crois, n'est pas encore apparue) de caractériser ces nouvelles équations.

10. — Il était bien naturel que les applications de la nouvelle proposition se soient multipliées et on ne doit pas s'étonner que les mathématiciens aient tout de suite fixé leur attention sur les plus simples équations algébriques d'un degré quelconque, c'est-à-dire sur les équations binômes. Une simple mention de cette application se trouve dans la troisième édition de l'*Algèbre* de Lefébure de Fourcy, qui dans une note (p. 487), a énoncé une proposition qui se rapporte à l'équation qu'on obtient d'une équation de la forme $\frac{x^{2m+1}-1}{x-1}=0$, en faisant $x+\frac{1}{x}=y$. Cette proposition a été établie par un ancien élève de l'Ecole Polytechnique (M. Gascheau), dans un mémoire du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (t. VII, pp. 126-132); elle attira l'attention de Sturm, qui s'empressa d'apporter [34] une simplification à la démonstration proposée.

Il est intéressant de remarquer que notre mathématicien démontre son théorème par un raisonnement lumineux, presque sans calcul. Or un des premiers géomètres qui l'étudia, s'occupa de préférence d'exprimer ses fonctions auxiliaires (qui sont des fonctions symétriques des racines de l'équation considérée), en fonction de ces racines. C'est dans une note publiée par Sylvester dans le cahier de décembre 1839 du *Philosophical Magazine*, qu'on rencontre pour la première fois les expressions suivantes des fonctions de Sturm relatives à une équation $V = 0$ ayant pour racines les nombres réels a, b, ..., h:

$$V_1 = \Sigma (x - b)(x - c) \dots (x - h)$$

$$V_2 = \frac{1}{m^2} \Sigma (a - b)^2 (x - c) \dots (x - h)$$

$$V_3 = \frac{1}{\lambda_3} \Sigma (a - b)^2 (a - c)^2 (b - c)^2 (x - d)(x - e) \dots (x - h)$$

$$V_4 = \frac{1}{\lambda_4} \Sigma (a - b)^2 (a - c)^2 (a - d)^2 (b - c)^2 (b - d)^2 (c - d)^2 (x - e) \dots (x - h)$$

. . . .

$$V_m = \frac{1}{\lambda_m} (a - b)^2 (a - c)^2 \dots (a - h)^2 (b - c)^2 \dots (g - h)^2$$

les λ étant des coefficients dont l'auteur anglais ne donne pas les expressions générales. Ces expressions ont été découvertes par Sturm lui-même dans un remarquable mémoire [35] où les formules de Sylvester sont établies et complétées par la détermination des constantes λ; il est bon d'ajouter que Liouville montra tout de suite (*Journ. de math. pures et appl.*, t. VII, p. 528) qu'on peut arriver au même résultat à l'aide d'une formule donnée par Cauchy dans son *Cours d'Analyse algébrique* [1].

V. — Suite des travaux sur la théorie des équations.

11. — A la même période de l'activité de Sturm appartiennent deux mémoires présentés à l'Académie des Sciences, mais dont on ne connaît que les courts résumés publiés dans le *Bulletin de Ferussac*. Dans l'une [20], il applique un procédé, dont s'est servi Fourier dans ses recherches sur les équations numériques, pour déterminer les valeurs réelles et positives de x satisfaisant à une équation de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \dots + Mx^\mu = 0$$

où les coefficients A, B, C, ... M sont des nombres donnés et les exposants α, β, γ, ..., μ sont des nombres réels quelconques,

[1] Pour une bibliographie assez riche relative au théorème de Sturm, nous renvoyons nos lecteurs à un article de M. Lecat dans le t. II (2^{me} sér.), 1923, de *L'Intermédiaire des mathématiciens*.