

# I. — Les théorèmes A et B.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## I. — LES THÉORÈMES A ET B.

De la relation

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$$

il suit

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{h=0}^{n-1} c_h = \sum_{h=0}^{n-1} \cos \left( \varphi + \frac{2h\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{h=0}^{n-1} e^{i \left( \varphi + \frac{2h\pi}{n} \right)} + \sum_{h=0}^{n-1} e^{-i \left( \varphi + \frac{2h\pi}{n} \right)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i(\varphi+2\pi)} - e^{i\varphi}}{\frac{2i\pi}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1}} + \frac{e^{-i(\varphi+2\pi)} - e^{-i\varphi}}{\frac{-2i\pi}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1}} \right] = 0, \end{aligned}$$

pour  $n \neq 1$ .

On a de même, pour  $m < n$

$$\sum_{h=0}^{n-1} \cos \left( \varphi + \frac{2mh\pi}{n} \right) = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \cos^m \varphi &= \frac{1}{2^m} \left[ e^{im\varphi} + \binom{m}{1} e^{i(m-2)\varphi} + \dots + e^{-im\varphi} \right] \\ &= \frac{1}{2^m} \left[ 2 \cos m\varphi + 2 \binom{m}{1} \cos (m-2)\varphi + \dots \right]; \end{aligned}$$

le dernier terme est

$$\binom{m}{\frac{m}{2}} \quad \text{ou} \quad 2 \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \cos \varphi,$$

suivant que  $m$  est pair où impair. D'où, en vertu des formules trouvées,

$$s_m = \sum_{h=0}^{n-1} c_h^m = \begin{cases} \frac{1}{2^m} \binom{m}{\frac{m}{2}} n & \text{pour } m \text{ pair,} \\ 0 & \text{pour } m \text{ impair.} \end{cases} \quad (1)$$

Les sommes  $s_m$  de degré impair sont donc nulles; celles de degré pair sont des fonctions essentiellement positives, ration-

nelles et entières de  $n$ . Tout cela pour  $m < n$ ; pour  $m \geq n$  les choses ne vont pas ainsi, et c'est là la raison du défaut de continuité que Sturm remarquait avec surprise dans ses théorèmes.

On a en particulier

$$s_2 = \frac{n}{2}, \quad s_4 = \frac{3n}{8}.$$

En outre, une fonction symétrique (nous entendons toujours : rationnelle et entière) des quantités  $\cos \frac{2h\pi}{n}$  de degré  $m$  sera, en vertu d'un théorème bien connu, une fonction rationnelle et entière de  $s_1, s_2, \dots, s_m$  et, par conséquent, pour  $m < n$ , une fonction rationnelle et entière de  $n$ .

Les résultats obtenus nous permettent de démontrer rapidement les théorèmes de Sturm.

Prenons comme origine des coordonnées le centre d'un polygone régulier de  $n$  côtés, inscrit dans un cercle de rayon 1, et faisons passer l'axe  $x$  par le milieu de l'un des côtés. Les cosinus directeurs des perpendiculaires aux côtés seront alors

$$\cos \frac{2h\pi}{n}, \quad \sin \frac{2h\pi}{n} \quad (h = 0, 1, \dots, n-1);$$

la distance du centre aux côtés sera  $\cos \frac{\pi}{n}$ .

Les équations normales des côtés seront alors

$$x \cos \frac{2h\pi}{n} + y \sin \frac{2h\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{n} = 0,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho \cos \left( -\varphi + \frac{2h\pi}{n} \right) + \cos \frac{\pi}{n} = 0,$$

et les premiers membres de ces équations donneront les distances  $d_h$  du point  $(\rho, \varphi)$  aux côtés. Une fonction symétrique de degré  $m$  des  $d_h$  sera une fonction rationnelle et entière de  $\rho$  de degré  $m$  ayant comme coefficients des fonctions symétriques de degré  $\leq m$  des quantités  $\cos \left( -\varphi + \frac{2mh\pi}{n} \right)$ , qui sont, comme nous l'avons trouvé pour  $m < n$ , des fonctions de  $n$ .

Notre fonction se réduit donc à une fonction rationnelle et entière de  $\rho$  et  $n$ , et le lieu des points pour lesquels elle a une valeur constante  $C$  sera représenté par l'équation

$$F(\rho, n) = C.$$

Ce lieu est donc constitué par *une ou plusieurs circonférences concentriques au polygone*. Le théorème B, dont A est un cas particulier, est ainsi démontré.

Le cas de plusieurs circonférences, dont nous donnons ci-dessous un exemple <sup>1</sup>, ne peut pas se présenter dans le cas du théorème A.

En effet, on a

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \cos^i \frac{\pi}{n} s_{m-i} \rho^{m-i};$$

dans le polynôme à droite les coefficients des puissances impaires de  $\rho$  pour  $m < n$  sont nuls, et ceux des puissances paires sont des fonctions essentiellement positives de  $n$ , d'où il suit que l'équation en  $\rho$

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h^m = \text{const.}$$

a tout au plus *une seule* racine positive.

<sup>1</sup> Considérons pour  $n = 5$ , la fonction symétrique des  $d_h$

$$f(d_h) = \sum_{h=0}^4 d_h^4 - \frac{9}{20} \left[ \sum_{h=0}^4 d_h^2 \right]^2.$$

On trouve, en écrivant  $\delta$  pour  $\cos \frac{\pi}{5}$ ,

$$\sum_{h=0}^4 d_h^4 = \frac{15}{8} \rho^4 + 15 \delta^2 \rho^2 + 5 \delta^4,$$

$$\sum_{h=0}^4 d_h^2 = \frac{5}{2} \rho^2 + 5 \delta^2.$$

Il en résulte

$$f(d_h) = -\frac{15}{16} \rho^4 + \frac{15}{4} \delta^2 \rho^2 - \frac{25}{4} \delta^4$$

et l'équation

$$f(d_h) = -\frac{55}{16} \delta^4$$

a les racines  $\rho^2 = \delta^2$ ,  $\rho^2 = 3\delta^2$ .

Il faut toutefois remarquer que le théorème A ne subsiste pas pour  $m = 1$ . Il résulte en effet

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = s_1 \rho + n \cos \frac{\pi}{n} = n \cos \frac{\pi}{n},$$

c'est-à-dire :

*La somme (algébrique) des distances d'un point aux côtés d'un polygone régulier est constante pour tous les points du plan.*

## II. — LE THÉORÈME C.

Venons maintenant à la démonstration du théorème C.

Faisons passer l'axe des  $x$  par l'un des sommets du  $n$ -gone; les coordonnées des sommets seront alors

$$\cos \frac{2h\pi}{n}, \quad \sin \frac{2h\pi}{n} \quad (h = 0, 1, \dots, n-1),$$

et les carrés des distances du point  $(x, y)$  ou  $(\rho, \varphi)$  aux sommets seront

$$\begin{aligned} l_h^2 &= \left(x - \cos \frac{2h\pi}{n}\right)^2 + \left(y - \sin \frac{2h\pi}{n}\right)^2 \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho \left(x \cos \frac{2h\pi}{n} + y \sin \frac{2h\pi}{n}\right) \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho \cos \left(-\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \sum_{i=0}^m (-1)^i 2^i s_i \rho^i (\rho^2 + 1)^{m-i}.$$

Or, si  $m < n$ , toutes les sommes  $s_i$  d'indices impairs sont nulles et toutes celles d'indices pairs sont positives; il résulte

que  $\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m}$  est un polynôme en  $\rho$  à coefficients positifs et dépendant seulement de  $n$ . L'équation

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \text{const.} \quad (m < n)$$