Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉOMÉTRIQUES DE CHARLES STURM

Kapitel: III. — Sur quelques polygones plans équilatères.

Autor: Vivanti, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28596

a donc tout au plus une racine positive, et le lieu géométrique qu'elle représente est constitué par *une seule* circonférence (réelle) au plus.

Le théorème C *est vrai non seulement pour les puissances paires inférieures à* n, *mais même pour celles inférieures à* 2n.

III. — Sur quelques polygones plans équilatères.

Losange. — Prenons comme origine des coordonnées le centre du polygone, et comme axes cartésiens obliques les parallèles à ses côtés; et soit λ l'angle des deux axes. En désignant par δ la demi-longueur des côtés, les équations normales des côtés sont

$$\pm x + \delta = 0 \,, \qquad \pm y + \delta = 0 \,.$$

Il suit de là

$$\frac{1}{\sin^2 \lambda} \sum_{h=0}^{3} d_h^2 = (x + \delta)^2 + (-x + \delta)^2 + (y + \delta)^2 + (-y + \delta)^2 =$$
$$= 2(x^2 + y^2 + 2\delta^2) \;;$$

$$\frac{1}{\sin^3 \lambda} \sum_{h=0}^{3} d_h^3 = (x + \delta)^3 + (-x + \delta)^3 + (y + \delta)^3 + (-y + \delta)^3 =$$
$$= 2\,\delta[3(x^2 + y^2) + 2\,\delta^2] \,.$$

Les lieux $\sum_{h=0}^{3} d_h^2 = \text{const.}$ et $\sum_{h=0}^{3} d_h^3 = \text{const.}$ sont donc des ellipses, dont les diamètres parallèles aux côtés du losange sont conjugués et ont égale longueur.

Pour tout polygone équilatère ou non, les lieux $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^2 = \text{const.}$ sont des ellipses. En effet, le premier membre est une fonction quadratique de x, y, qui, par sa nature, ne peut représenter qu'une conique bornée.

Si le polygone a deux axes de symétrie orthogonaux, on vérifie aisément que les lieux $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^3$ sont aussi des ellipses.

Pour tout polygone équilatère la somme des distances d'un point aux côtés est constante pour tous les points du plan.

Si x_h, y_h $(h = 0, 1, ..., n-1)$ sont les coordonnées des sommets du polygone, et l est la longueur commune des côtés, les équations normales des côtés sont

$$\frac{1}{l}\left[(y_{h+1} - y_h)\,x + (x_h - x_{h+1})\,y + (x_{h+1}\,y_h - x_h\,y_{h+1})\right] = 0 \ .$$

Il suit immédiatement de là

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = \frac{1}{l}\sum_{h=0}^{n-1}(x_{h+1}\,y_h - x_h\,y_{h+1}) \ .$$

IV. — Les polyèdres réguliers.

Je vais démontrer les théorèmes suivants:

D. — *La somme algébrique des distances d'un point aux faces d'un polyèdre régulier est constante pour tous les points de l'espace.*

E. — *Le lieu des points tels, que la somme des puissances* m$^{\text{ièmes}}$ *de leurs distances aux faces d'un polyèdre régulier soit constante, est une sphère concentrique au polyèdre pour les valeurs suivantes de* m:

2 pour le tétraèdre;
2 et 3 pour l'hexaèdre et l'octaèdre;
2, 3 et 4 pour le dodécaèdre et l'icosaèdre [1].

La même chose, sauf l'unicité de la sphère, pour toute fonction symétrique des distances, avec les mêmes limitations pour le degré m.

F. — *Sous les mêmes conditions des théorèmes précédents pour le nombre* m, *le lieu des points tels, que la somme des* 2m$^{\text{ièmes}}$ *puissances de leurs distances aux sommets d'un polyèdre soit constante, est une sphère concentrique au polyèdre.*

Les théorèmes D *et* E.

Prenons sur la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, n points distribués uniformément sur un

---

1 On peut dire que m doit être moindre que le nombre des sommets disposés en couronne autour d'un axe dans le polyèdre respectif.