

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
  
**Kapitel:** Réunion de Coire, 27 et 28 août 1938.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

*Réunion de Coire, 27 et 28 août 1938.*

La Société mathématique suisse a tenu sa 28<sup>me</sup> assemblée annuelle à Coire, les 27 et 28 août 1938, en même temps que la 119<sup>me</sup> session annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles.

La partie scientifique, présidée par M. le Professeur W. SCHERRER (Berne), a été consacrée aux communications dont on trouvera ci-après les résumés.

1. — K. MERZ (Coire). — *Polyèdres unilatères avec présentation de modèles.* — Cet exposé fait suite aux recherches<sup>1</sup> que l'auteur a consacrées aux polyèdres unilatères. En partant du ruban de Möbius et, à l'aide de modèles nouveaux, il montre comment on parvient à éviter les difficultés que l'on rencontre dans la représentation des polyèdres unilatères. Une étude d'ensemble des résultats obtenus est en préparation et un choix de modèles entièrement nouveaux figurera à l'Exposition nationale de Zurich (1939).

2. — H. RAMSER (Zurich). — *Généralisations de la surface de Steiner.*

3. — Louis KOLLROS (Zurich). — *Théorèmes de Géométrie.* — On démontre très simplement plusieurs théorèmes énoncés par Steiner et dont on n'a pas trouvé les démonstrations dans les manuscrits, en particulier les théorèmes relatifs aux coniques bitangentes à deux cercles (*Œuvres complètes*, tome II, p. 445-468) et aux suites

<sup>1</sup> Das Oktaeder-Oktant oder ein Heptaeder, *Commentarii Math. Helvetici*, vol. 8, 1936, p. 379-381. — Einseitiges Pentadekaeder (*Id.*), vol. 10 (1937), p. 1, § 2. — Vielfache mit Doppelstrecken, aus Prismen (*Id.*), p. 270-274.

Einseitige Polyeder aus Oktanten, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse*, 1937, II, p. 21-25.

Einseitige Polyeder aus dem Tetraeder, *Vierteljahrschrift der Naturf. Ges. in Zurich*, LXXXIII (1938), p. 108-112.

commensurables de cercles et de sphères (*O. c.*, t. I, p. 160, 225 et 455-457, nos 80-83).

On indique la relation simple qui existe entre la congruence des tangentes à deux sphères et les quadriques qui leur sont circonscrites. — (Voir *Commentarii Math. Helvetici*, vol. 11, p. 37-48.)

4. — Sophie PICCARD (Neuchâtel). — *Sur les bases du groupe symétrique.* — Quel que soit le nombre entier  $n \geq 3$ , on nomme *base* du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  d'ordre  $n!$  tout couple S, T de substitutions de  $\mathfrak{S}_n$  qui permettent, par composition, d'engendrer ce groupe. (Une seule substitution ne permet pas d'engendrer  $\mathfrak{S}_n$ .) Nous avons établi différents théorèmes relatifs aux bases du groupe  $\mathfrak{S}_n$ , dont voici les principaux:

*Proposition 1.* Quelle que soit la base S, T du groupe  $\mathfrak{S}_n$  ( $n \geq 3$ ), il n'existe aucune substitution non identique du groupe  $\mathfrak{S}_n$  qui soit permutable aussi bien avec S qu'avec T.

*Proposition 2.* Quelle que soit la base S, T du groupe  $\mathfrak{S}_n$  ( $n \geq 3$ ), s'il existe une substitution U de  $\mathfrak{S}_n$ , telle que  $USU^{-1} = T$  et  $UTU^{-1} = S$ , la substitution U est du second ordre et cette substitution est unique; d'autre part, quelle que soit la substitution P de  $\mathfrak{S}_n$ , il existe alors une substitution et une seule Q de  $\mathfrak{S}_n$ , telle que  $PSP^{-1} = QTQ^{-1}$  et  $PTP^{-1} = QSQ^{-1}$ .

*Proposition 3.* Si S, T est une base du groupe  $\mathfrak{S}_n$  ( $n \geq 3$ ), telle qu'il n'existe aucune substitution U de  $\mathfrak{S}_n$ , vérifiant les relations  $USU^{-1} = T$ ,  $UTU^{-1} = S$ , quelle que soit la substitution P de  $\mathfrak{S}_n$ , il ne saurait exister une substitution Q de  $\mathfrak{S}_n$ , telle que l'on ait à la fois  $PSP^{-1} = QTQ^{-1}$ ,  $PTP^{-1} = QSQ^{-1}$ .

*Proposition 4.* Quel que soit le nombre entier  $n \geq 3$ , le nombre total N de bases du groupe  $\mathfrak{S}_n$  est un multiple de  $\frac{n!}{2}$ .

*Proposition 5.* Quels que soient les nombres entiers  $n > 2$ ,  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) et  $k$  ( $1 < k < n$ ), les deux substitutions  $S = (1\ 2 \dots n)$ ,  $T = (m\ m+1 \dots m+k-1)$ , où les nombres  $> n$  doivent être réduits mod.  $n$ , constituent une base du groupe  $\mathfrak{S}_n$ , si l'un au moins des nombres  $n, k$  est pair.

*Proposition 6.* Quels que soient le nombre entier  $n \geq 3$  et les deux nombres  $a$  et  $b$  de la suite  $1, 2, \dots, n$ , la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions de la forme  $S = (1\ 2 \dots n)$ ,  $T = (a\ b)$ , constituent une base du groupe  $\mathfrak{S}_n$ , c'est que le plus grand commun diviseur  $D(|a-b|, n)$  des deux nombres  $|a-b|$  et  $n$  soit égal à 1.

*Proposition 7.* Quel que soit le nombre entier  $n \geq 3$ , la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions de la forme

$S = (1\ 2 \dots k)(k+1\ k+2 \dots n)$ ,  $T = (a\ b)$ , ( $1 \leq k < n$ ,  $1 \leq a \leq k$ ,  $k+1 \leq b \leq n$ ), constituent une base du groupe  $\mathfrak{S}_n$ , c'est que  $D(k, n-k) = 1$ .

*Proposition 8.* Quels que soient le nombre pair  $n \geq 4$  et les trois nombres distincts  $a, b, c$  de la suite  $1, 2, \dots, n$ , la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions de la forme  $S = (1\ 2 \dots n)$ ,  $T = (a\ b\ c)$  constituent une base du groupe  $\mathfrak{S}_n$ , c'est que  $D(|a-b|, |b-c|, n) = 1$ .

*Proposition 9.* Quels que soient le nombre impair  $n \geq 3$ , le nombre entier  $m$  ( $1 \leq m < n$ ) et les trois nombres  $a, b, c$  de la suite  $1, 2, \dots, n$ , dont l'un au moins est  $\leq m$  et l'un au moins est  $> m$ , la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions de la forme  $S = (1\ 2 \dots m)(m+1 \dots n)$ ,  $T = (a\ b\ c)$  constituent une base du groupe  $\mathfrak{S}_n$ , c'est que  $D(m, n-m, d) = 1$ ,  $d$  désignant la valeur absolue de la différence des deux nombres du système  $a, b, c$  qui appartiennent au même cycle de  $S$ .

*Proposition 10.* Quels que soient le nombre pair  $n \geq 4$  et les entiers  $k, m, a, b, c$  vérifiant les relations  $1 \leq k < m < n$ ,  $1 \leq a \leq k$ ,  $k+1 \leq b \leq m$ ,  $m+1 \leq c \leq n$ , la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions  $S = (1\ 2 \dots k)(k+1 \dots m)(m+1 \dots n)$ ,  $T = (a\ b\ c)$  constituent une base du groupe  $\mathfrak{S}_n$ , c'est que  $D(k, m-k, n-m) = 1$ .

*Proposition 11.* Quels que soient le nombre entier  $n \geq 5$  et les 5 nombres  $a, b, c, d, e$  de la suite  $1, 2, \dots, n$ , la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions  $S = (1\ 2 \dots n)$ ,  $T = (a\ b\ c)(d\ e)$  constituent une base du groupe  $\mathfrak{S}_n$ , c'est que  $D(|b-a|, |c-b|, |e-d|, n) = 1$ .

*Proposition 12.* Quels que soient les nombres entiers  $n \geq 3$  et  $k$  ( $1 < k < n$ ), deux substitutions de la forme  $S = (1\ 2 \dots k)$ ,  $T = (i\ i+1 \dots k\ k+1 \dots n)$ , ( $1 \leq i \leq k$ ), constituent une base du groupe  $\mathfrak{S}_n$ , si l'un au moins des nombres  $k, n-i+1$  est pair, aux trois exceptions suivantes près:  $S_1 = (1\ 2\ 3\ 4)$ ,  $T_1 = (3\ 4\ 5\ 6)$ ;  $S_2 = (1\ 2\ 3\ 4)$ ,  $T_2 = (2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ ;  $S_3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ ,  $T_3 = (3\ 4\ 5\ 6)$ .

*Proposition 13.* Quel que soit le nombre entier  $n \geq 3$ , il existe, pour toute substitution non identique  $S$  du groupe  $\mathfrak{S}_n$ , au moins une substitution  $T$  de  $\mathfrak{S}_n$  qui forme, avec  $S$ , une base de  $\mathfrak{S}_n$ , à l'exception des trois substitutions (12) (34), (13) (24), (14) (23) qui ne font partie d'aucune base du groupe  $\mathfrak{S}_4$ .

*Proposition 14.* Quel que soit le nombre entier  $n \geq 4$ , deux substitutions du second ordre ne peuvent pas constituer une base du groupe  $\mathfrak{S}_n$ .

*Proposition 15.* Quel que soit le nombre entier  $n \geq 4$ , il existe pour toute substitution circulaire  $S$  du groupe  $\mathfrak{S}_n$  au moins une substitution circulaire  $T$  de  $\mathfrak{S}_n$ , telle que  $S, T$  est une base de  $\mathfrak{S}_n$ .

Nous avons établi un système complet de bases du groupe  $\mathfrak{S}_n$  pour  $n = 3, 4, 5$  et  $6$ . Le nombre total de ces bases est le suivant:

$n$	3	4	5	6
N	9	108	3.420	113.760

5. — J.-J. BURCKHARDT (Zurich). — *Rapport du Comité Steiner-Schläfli*. — Dans sa séance constitutive, tenue à Zurich le 18 juin 1938, le Comité désigne M. Kollros comme président et M. Burckhardt comme rédacteur général. M. Kollros a présenté un rapport sur les manuscrits Steiner. Dans ce qui reste des pièces inédites, il n'y a plus rien qui soit propre à être publié. Tous les manuscrits sont catalogués; les problèmes posés par Steiner font l'objet d'un inventaire.

Quant aux manuscrits de Schläfli, M. Scherrer a constaté que le catalogue établi autrefois par J.-H. Graf est insuffisant; il devra être revu et complété. M. Burckhardt attire l'attention sur la correspondance très volumineuse qui n'a pas été publiée; on ne devra pas perdre de vue le développement ultérieur des idées de Schläfli au point de vue scientifique.

6. — J.-J. BURCKHARDT (Zurich). — *Remarques concernant la « Theorie der vielfachen Kontinuität » de Schläfli*. — Pour donner une idée de la richesse de l'œuvre scientifique du savant géomètre bernois, nous extrayons trois problèmes de sa « Theorie der vielfachen Kontinuität ». a) A l'aide du symbole  $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$  il établit pour la première fois les polytopes réguliers dans l'espace  $R_n$ . Tout récemment, en généralisant légèrement ces résultats, M. Coxeter a donné une théorie des polytopes uniformes qui forme la meilleure préparation élémentaire à la théorie de Schläfli.

b) Schläfli examine le nombre des éléments qui déterminent dans  $R_n$  un polytope limité par  $g$  hyperplans dont  $h$  passent par le premier sommet,  $h'$  par le deuxième, etc. Ce nombre est

$$gn - (h - n) - (h' - n) - \dots - \frac{n}{2}(n + 1).$$

Pour un polyèdre ( $n = 3$ ) vérifiant le théorème d'Euler, on trouve le nombre des côtés; Schläfli en déduit qu'un polyèdre est déterminé par ses côtés. Le parallélépipède montre que, sous cette forme, l'assertion est fautive et la question reste ouverte de savoir quel est le parti que l'on peut tirer de ces résultats.

c) Dans la seconde partie de l'ouvrage de Schläfli figure sa belle découverte relative au simplexe sphérique. Son différentiel s'exprime

des simplex qui le limitent dont le nombre des dimensions est inférieur de deux et à l'aide des angles qu'ils forment entre eux. Aux deux démonstrations de Schläfli, M. H. Kneser vient d'en ajouter une troisième à l'aide d'une intégrale et qui surprend par sa remarquable simplicité. De la formule de Schläfli on déduit facilement la dépendance linéaire des fonctions de Schläfli dans les espaces d'un nombre pair de dimensions; ces résultats sont en liens très étroits avec les résultats obtenus par Poincaré en 1905. Pour le simplex sur la sphère dans  $R_3$ , la fonction de Schläfli se rattache d'une manière très étroite à celle de Lobatschewski, comme l'a montré M. Coxeter à l'aide de la fonction  $\Psi$  d'Abel. On peut se demander si ces liens existent encore dans des espaces  $R_n$ .

Ces quelques exemples suffisent à montrer que l'œuvre de Schläfli est riche en trésors cachés.

7. — Emile MARCHAND (Zurich). — *Le programme scientifique du XII<sup>e</sup> Congrès international d'Actuaires, Lucerne 1940.* — Le Conseil de direction du Comité permanent des Congrès internationaux d'Actuaires a décidé de mettre à l'ordre du jour du prochain Congrès une série de questions qui sont de nature à intéresser les mathématiciens. — (Le programme a été reproduit dans *L'Ens. math.*, 1938, p. 216-217.)

8. — E. SCHUBARTH (Bâle). — *Sur les groupes linéaires normalement discontinus à deux variables. II.* — Le principe de dualité entre les points et les plans analytiques nous amène à compléter la communication antérieure<sup>1</sup> (citée par I). Partant de la discontinuité normale, notion plus restreinte que la discontinuité propre, on arrive à une généralisation de la discontinuité propre. Nous appelons un groupe linéaire  $G$  *quasi-discontinu* (bedingt-diskontinuierlich) dans un domaine  $A$ , si pour chaque point  $p$  de  $A$  on peut vérifier la condition suivante: pour chaque suite normale  $F$  de transformations de  $G$ , donnée à l'avance (ne contenant pas l'identité comme seule transformation), on peut trouver un voisinage  $U(p)$  de  $p$  et dans  $U(p)$  un point  $g$  entouré d'un voisinage  $V(g)$ ,  $U$  et  $V$  tels qu'en employant les transformations de  $F$ , on n'aura qu'un nombre fini d'images de  $V(g)$  ayant des points en commun avec  $U(p)$ . — Nous étudions un groupe  $G$  de première classe, formé de transformations ponctuelles linéaires à l'espace de deux variables complexes, d'autre part le groupe  $\Gamma$  des transformations des plans analytiques engendrées par  $G$ . Pour que le groupe  $G$  soit normalement discontinu au point  $p$ , il faut et il suffit que le groupe  $\Gamma$  soit quasi-discontinu [pas: proprement discontinu, comme ce théorème est énoncé en I] en chaque plan analytique  $\varepsilon_p$  passant par  $p$ . — Comme variétés isométriques

<sup>1</sup> Voir le compte rendu de la réunion de Genève, *L'Ens. math.*, 1937, p. 390-391.

on trouve *a*) pour  $G$ : des familles (à un paramètre) de plans analytiques, avec un plan coordonné, appelé l'« axe » de la variété; *b*) pour  $\Gamma$ : des familles (à un paramètre) de points, formant un cercle, avec un point coordonné, le « pôle » de la variété. Un point d'accumulation des pôles sera appelé un point limite de  $G$ , un plan d'accumulation des axes un plan limite de  $\Gamma$ . On peut alors choisir les coordonnées de sorte que les éléments limites, définis tout à l'heure, peuvent servir à la détermination des domaines de la discontinuité. Le résultat est le suivant: 1) le *domaine maximum*  $D$  de la *quasi-discontinuité* de  $G$  est formé par tous les points sauf les points limites de  $G$ ; 2) le *domaine maximum*  $N$  de la *discontinuité normale* de  $G$  est formé par tous les points situés en dehors d'un plan limite de  $\Gamma$ . — Si les deux groupes  $G$  et  $\Gamma$  sont normalement discontinus en une paire d'éléments incidents, des points existent qui, avec un voisinage, sont situés à l'extérieur de chaque variété isométrique de  $G$ . Le domaine maximum  $R$  de ces points est un *domaine fondamental* de  $G$  pour  $N$ . (Résultat analogue pour  $\Gamma$ .) — La théorie des variétés isométriques est à établir d'une façon analogue pour les groupes de première classe normalement discontinus à  $n$  variables.

9. — W. SCHERRER (Berne). — *La dynamique dans l'espace-temps à quatre dimensions.*

## CHRONIQUE

### Huitième Concours international du Prix N. J. Lobatschefski.

*Dans notre dernier fascicule (p. 214), nous avons annoncé l'attribution du Prix Lobatschefski à M. Elie Cartan. Voici maintenant des renseignements complémentaires du plus grand intérêt que nous devons à M. Nicolas PARFENTIEFF, Président de la Société physico-mathématique de Kazan. Nous lui en exprimons nos plus vifs remerciements. — Pour ce qui est de l'orthographe du nom de Lobatschefski, nous adoptons celle qui nous vient ainsi de Kazan.*

Le Concours international pour le prix Lobatschefski a été clos le 12 septembre 1937. Dans sa séance solennelle, tenue à l'Université Lénine de Kazan, la Société physico-mathématique, après avoir entendu les rapports sur les travaux présentés au concours et les observations du jury, a pris les décisions suivantes:

1. — Vu le rapport de M. le professeur Levi-Civita (Rome), la Société physico-mathématique décerne, à l'unanimité, le *Prix*