# III. – DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

En multipliant membre à membre les équations (2) et (3), et en supprimant le facteur A'B dans les deux membres, on obtient

$$d_2 b = A''A' = a \frac{\sin C}{\sin^2 (B + C)} dB .$$

Si maintenant nous considérons la petite variation $dC$ qui modifie la valeur de l'angle C, le triangle ABC, premièrement changé en A'BC' par la variation $da$, et après en A''BC' par la variation $dB$, sera finalement changé en A'''BC'. Calculons l'excès $d_3 b$ de la valeur finale, A'''C', du côté $b$ sur sa deuxième valeur intermédiaire A''C'. Du point C' comme centre, avec A''C' comme rayon, décrivons l'arc de circonférence A''H, dont la longueur est, à d'infiniment petits près,

$$A''H = b \cdot dC = a \frac{\sin B}{\sin (B + C)} dC .$$

Mais, l'arc A''H étant infiniment petit, le triangle A'''A''H peut être considéré comme un triangle rectiligne, rectangle en H, et on aura, à d'infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$d_3 b = A'''H = A''H \operatorname{cotang} A''A'''H = - a \frac{\sin B \cdot \cos (B + C)}{\sin^2 (B + C)} dC ,$$

car on a

$$\operatorname{cotang} A''A'''H = - \operatorname{cotang} (B + dB + C + dC) .$$

La somme des trois valeurs $d_1 b$, $d_2 b$, $d_3 b$, nous donne finalement l'expression cherchée de $db$.

### III. — Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Il s'agit de faire voir par des considérations géométriques (ceci étant déjà démontré analytiquement), que dans le calcul des dérivées partielles d'ordre supérieur d'une fonction de plusieurs variables, on peut intervertir l'ordre des dérivations.

Soit une fonction de deux variables

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$

et A un point quelconque de la surface représentative de cette fonction, dont l'ordonnée $z$ est AP (fig. 3). Si nous donnons à $x$ un accroissement $dx$ = PQ, nous aurons un nouveau point B de la surface et une nouvelle ordonnée BQ. Or, BB′, différence des deux ordonnées, provenant d'avoir donné un accroissement à $x$ seulement, sera

$$\mathrm{BB}' = z' - z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z\,. \qquad (2)$$

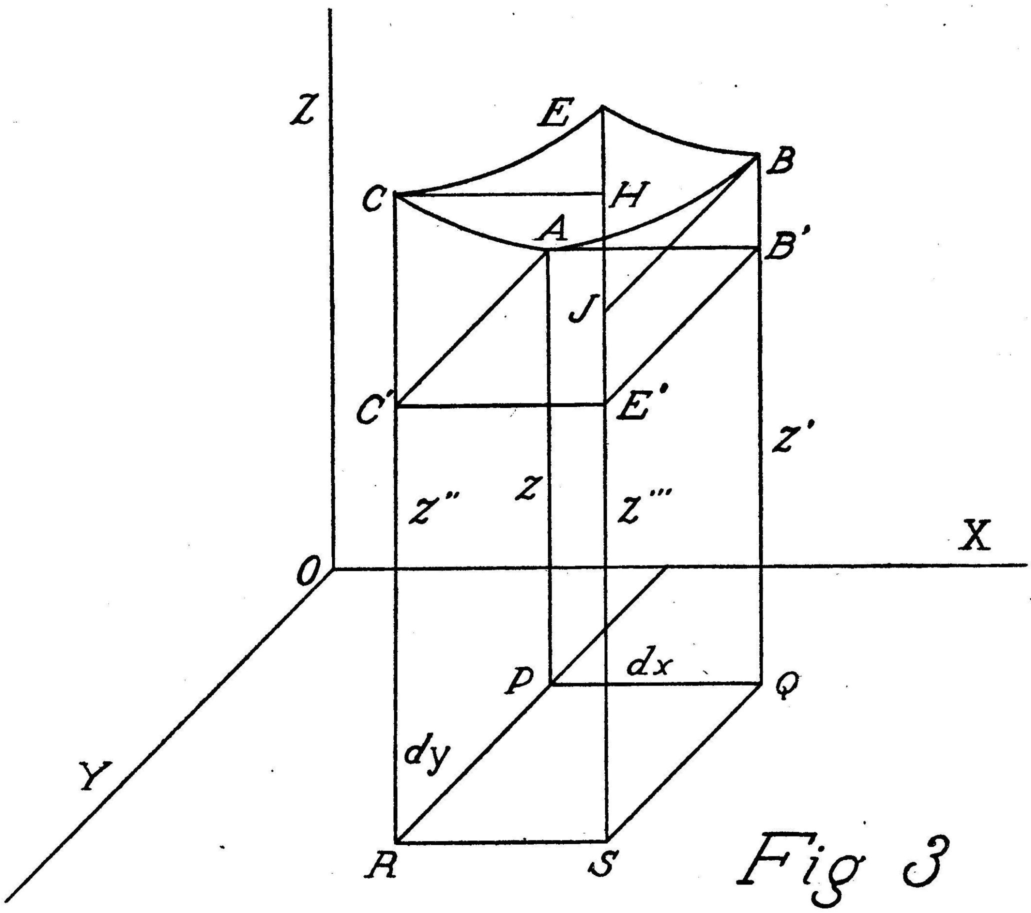

Fig 3

Partons encore une fois du point P, donnons seulement à $y$ un accroissement infiniment petit $dy$ = PR, et nous aurons un nouveau point C de la surface, auquel correspondra une ordonnée $z''$ = CR. La différence des ordonnées $z$ et $z''$ sera de manière analogue

$$\mathrm{CC}' = z'' - z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z\,. \qquad (3)$$

Finalement, à partir du point R ($x$, $y + dy$), donnons à $x$ un accroissement $dx$; nous obtiendrons ainsi un nouveau point E de la surface, avec une ordonnée ES $= z'''$. Comparons $z'''$ avec $z'$ et avec $z''$:

$$EJ = ES - BQ = \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z \ . \qquad (4)$$

Les équations (3) et (4) montrent que CC′ et EJ sont deux valeurs consécutives de $\frac{\partial z}{\partial y} dy$, correspondantes à des valeurs de $x$ qui diffèrent entre elles de $dx$; donc leur différence sera:

$$EJ - CC' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy\, dx = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} dy\, dx \ . \qquad (5)$$

De même,

$$EH = ES - CR = \frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z \ . \qquad (6)$$

Les équations (2) et (6) font voir que BB′ et EH sont deux valeurs consécutives de $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ correspondantes à des valeurs de $y$ qui diffèrent de $dy$; ainsi leur différence sera

$$EH - BB' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx\, dy = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} dx\, dy \ . \qquad (7)$$

Donc, l'ordre des différentiations successives sera indifférent si

$$EJ - CC' = EH - BB' \ ,$$

égalité qui devient une identité évidente si nous y remplaçons EJ par son égal EE′ — BB′, et EH par son égal EE′ — CC′.

## IV. — Explication géométrique de la méthode d'intégration par parties.

Il s'agit de la formule classique

$$\int_M^N u\,dv = (uv)_M^N - \int_M^N v\,du \ . \qquad (1)$$

Considérons une fonction de deux variables

$$f(u, v) = 0 \qquad (2)$$