

V. — Signification géométrique de la constante d'Euler.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(intégrale que nous supposons difficile) mais il sera aisé de trouver l'aire MNRS, parce que

$$\text{aire MNRS} = \int_M^N v du$$

(intégrale que nous supposons facile).

D'autre part, les aires des rectangles SNOQ et RMOP se déterminent facilement: elles sont égales respectivement à $u_0 v_0$ et à $u_1 v_1$.

Or, connaissant les aires SNOQ, RMOP et MNRS, nous pouvons en déduire l'aire MNPQ, car

$$\text{aire MNPQ} = \text{aire SNOQ} - \text{aire RMOP} - \text{aire MNRS}$$

c'est-à-dire

$$\int_M^N u dv = u_1 v_1 - u_0 v_0 - \int_M^N v du ,$$

qui est précisément la formule (1).

V. — SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DE LA CONSTANTE D'EULER.

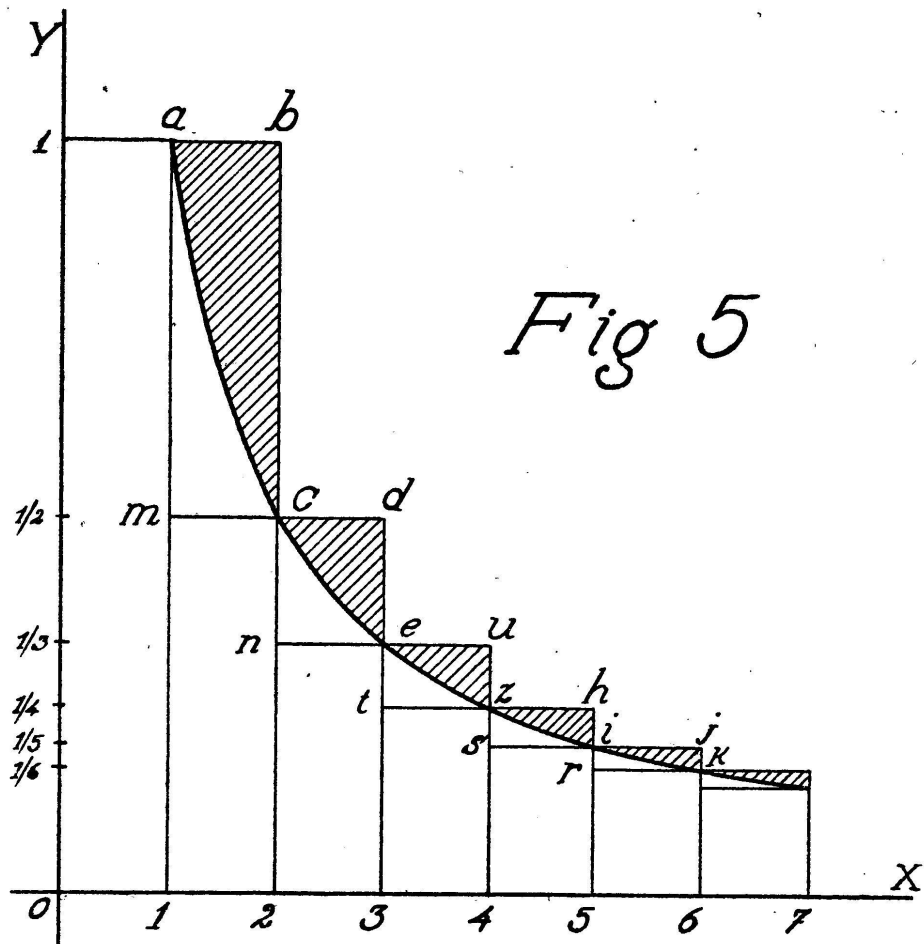
La constante d'Euler,

$$C = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \log \text{ nép } n \right]_{n \rightarrow \infty}$$

qui établit une relation simple entre $\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m}$ et $\log \text{ nép } n$ quand $n \rightarrow \infty$, a sa raison d'être dans cette circonstance que le terme général de la série est $1/m$ tandis que la dérivée de $\log \text{ nép } x$ est $1/x$. Construisons, comme le montre la figure 5, une succession de rectangles de base égale à l'unité, et de hauteurs égales à $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. Ces rectangles seront compris entre les ordonnées successives tirées par les points d'abscisses égales à 1, 2, 3,

4, ... L'ensemble de ces rectangles formera la figure *abcdeuzhijk...* et son aire aura pour valeur

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m}$$



Pour plus de commodité, on a pris dans la figure l'échelle des abscisses beaucoup moindre que celle des ordonnées, de manière que l'unité d'aire soit la surface du rectangle *1ab2*. Construisons aussi l'hyperbole équilatère

$$y = \frac{1}{x} .$$

Cette hyperbole enferme, avec l'axe des abscisses et deux ordonnées extrêmes correspondantes aux abscisses 1 et *n*, une aire

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \log \text{ nép } n .$$

Si nous considérons que tant les rectangles définis ci-dessus que l'hyperbole équilatère se prolongent indéfiniment vers les abscisses croissantes, nous verrons que l'aire de la partie hachurée de la figure est

$$\lim_{n \leftarrow \infty} \left[\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m} - \log \text{nép } n \right] = C .$$

La constante d'Euler est égale, donc, à la somme des aires des triangles mixtilignes (employons encore cet adjectif démodé) *abc, cde, euz, zhi, ...*: telle est sa signification géométrique extrêmement simple.

Considérons maintenant l'ensemble des triangles non hachurés qui restent au-dessous de l'hyperbole: les triangles *amc, cne, etz, zsi, ...* et appelons *C'* la somme de ses aires. Nous aurons

$$C' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_1^n \frac{dx}{x} - \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m+1} \right] .$$

La somme de ces grandeurs, qui est l'aire de l'ensemble des rectangles *abmc, cdne, eutz, zhsi, ...* sera

$$C + C' = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right] = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m(m+1)} .$$

Leur différence, soit la somme des aires des triangles hachurés moins les aires des triangles non hachurés, vaudra:

$$\begin{aligned} C - C' &= \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{1}{m} - \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} - \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} + \frac{1}{m+1} \right] = \\ &= -1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[2 \cdot \frac{1}{m} - 2 \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \right] = -1 + 2C . \end{aligned}$$

En conséquence,

$$C' = 1 - C \quad \text{et} \quad C + C' = 1$$

et, en comparant avec l'équation (1), on voit que

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 1 .$$

On vérifie immédiatement sur la figure l'exactitude de la formule (2), parce que la somme des rectangles $abmc$, $cdne$, $eutz$, ... est équivalente au rectangle $1ab2$.

Faisons encore une remarque. L'hyperbole équilatère divise chacun des rectangles $abmc$, $cdne$, $eutz$, ... en deux parties qui, en raison de la convexité de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, sont inégales. La partie qui reste au-dessous de la courbe (triangles non hachurés) est moindre que celle qui reste au-dessus (triangles hachurés). Et ainsi, la constante d'Euler est plus grande que $\frac{1}{2}$ ($C = 0.57721\dots$) tandis que la constante C' est moindre que $\frac{1}{2}$ ($C' = 0.42278\dots$).

Mais les rectangles seront divisés par leurs diagonales ac , ce , ez , ... en deux triangles égaux, dont les sommes vaudront $\frac{1}{2}$. En conséquence, entre l'hyperbole équilatère et ces diagonales, qui sont des cordes de la courbe, seront compris un ensemble de segments ou lunules, dont les aires auront pour somme $C - \frac{1}{2}$, soit $0.07721\dots$. En calculant analytiquement la somme des aires de ces segments ou lunules, on obtient identiquement $C - \frac{1}{2}$: leur considération ne présente, donc, aucune utilité pour le calcul de C .

VI. — SÉRIE DOUBLE DONT LA SOMME EST ÉGALE A LA CONSTANTE D'EULER.

A propos de la constante d'Euler, je vais mentionner une série double dont la somme est égale à la valeur de la constante; quoique ce sujet ne représente pas « un appel à l'intuition géométrique », je crois qu'il n'est pas trop déplacé ici.

Posons le développement de $\log \text{nép } n$ en série de Taylor à partir du développement de $\log \text{nép } (n - 1)$

$$\log \text{nép } n = \log \text{nép } (n - 1) + \\ + \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{2(n - 1)^2} + \frac{1}{3(n - 1)^3} - \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{s(n - 1)^s}.$$