V. — Signification géométrique de la constante d'Euler.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

(intégrale que nous supposons difficile) mais il sera aisé de trouver l'aire MNRS, parce que

$$\text{aire MNRS} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} v\,du$$

(intégrale que nous supposons facile).

D'autre part, les aires des rectangles SNOQ et RMOP se déterminent facilement : elles sont égales respectivement à $u_0 v_0$ et à $u_1 v_1$.

Or, connaissant les aires SNOQ, RMOP et MNRS, nous pouvons en déduire l'aire MNPQ, car

$$\text{aire MNPQ} = \text{aire SNOQ} - \text{aire RMOP} - \text{aire MNRS}$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} u\,dv = u_1 v_1 - u_0 v_0 - \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} v\,du ,$$

qui est précisément la formule (1).

V. — Signification géométrique de la constante d'Euler.

La constante d'Euler,

$$\mathrm{C} = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \log\text{nép}\, n\right]_{n \to \infty}$$

qui établit une relation simple entre $\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m}$ et log nép n quand $n \longrightarrow \infty$, a sa raison d'être dans cette circonstance que le terme général de la série est $1/m$ tandis que la dérivée de log nép x est $1/x$. Construisons, comme le montre la figure 5, une succession de rectangles de base égale à l'unité, et de hauteurs égales à $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ Ces rectangles seront compris entre les ordonnées successives tirées par les points d'abscisses égales à 1, 2, 3, 4,... L'ensemble de ces rectangles formera la figure *labcdeuzhijk...* et son aire aura pour valeur

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m}$$

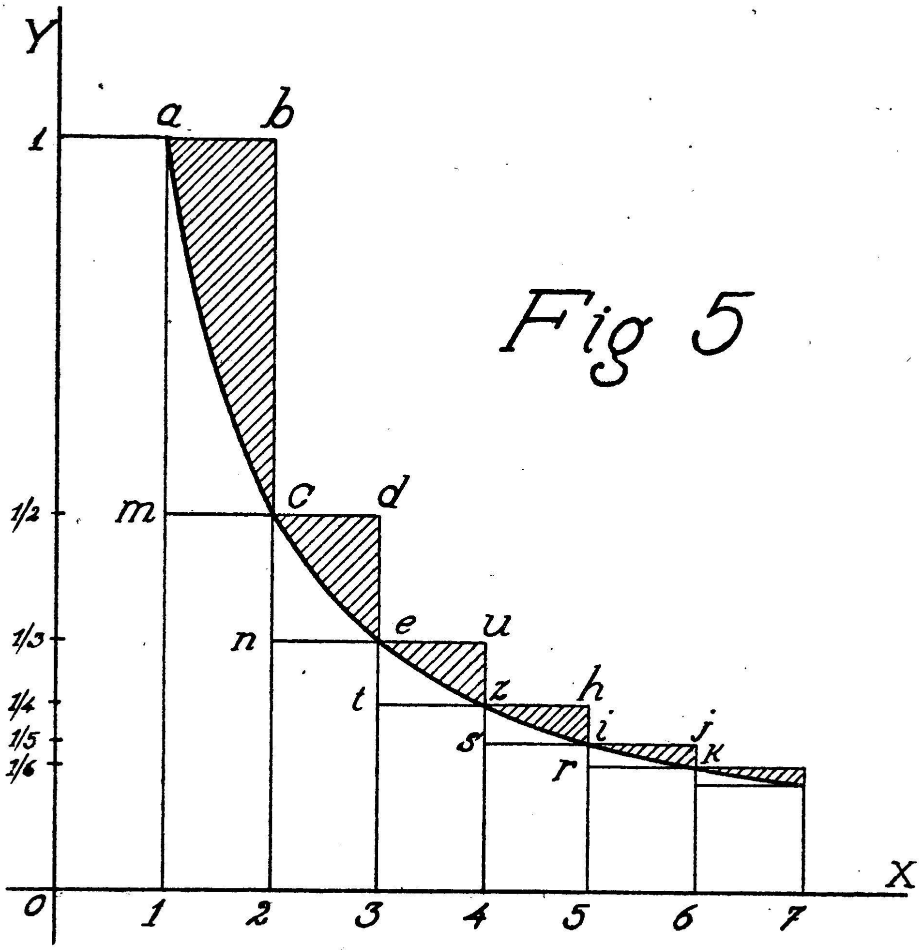

Fig 5

Pour plus de commodité, on a pris dans la figure l'échelle des abscisses beaucoup moindre que celle des ordonnées, de manière que l'unité d'aire soit la surface du rectangle $1ab2$. Construisons aussi l'hyperbole équilatère

$$y = \frac{1}{x} \cdot$$

Cette hyperbole enferme, avec l'axe des abscisses et deux ordonnées extrêmes correspondantes aux abscisses 1 et n, une aire

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \log \text{nép}\, n \ .$$

Si nous considérons que tant les rectangles définis ci-dessus que l'hyperbole équilatère se prolongent indéfiniment vers les abscisses croissantes, nous verrons que l'aire de la partie hachurée de la figure est

$$\lim \left[\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m} - \log \text{nép } n \right]_{n \leftarrow \infty} = C \, .$$

La constante d'Euler est égale, donc, à la somme des aires des triangles mixtilignes (employons encore cet adjectif démodé) *abc*, *cde*, *euz*, *zhi*, ...: telle est sa signification géométrique extrêmement simple.

Considérons maintenant l'ensemble des triangles non hachurés qui restent au-dessous de l'hyperbole: les triangles *amc*, *cne*, *etz*, *zsi*, ... et appelons C′ la somme de ses aires. Nous aurons

$$C' = \lim \left[\int_1^n \frac{dx}{x} - \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m+1} \right]_{n \to \infty} .$$

La somme de ces grandeurs, qui est l'aire de l'ensemble des rectangles *abmc*, *cdne*, *eutz*, *zhsi*, ... sera

$$C + C' = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right] = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m(m+1)} \, .$$

Leur différence, soit la somme des aires des triangles hachurés moins les aires des triangles non hachurés, vaudra:

$$C - C' = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{1}{m} - \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} - \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} + \frac{1}{m+1} \right] =$$

$$= -1 + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[2 \cdot \frac{1}{m} - 2 \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \right] = -1 + 2C \, .$$

En conséquence,

$$C' = 1 - C \qquad \text{et} \qquad C + C' = 1$$

et, en comparant avec l'équation (1), on voit que

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 1 \, .$$

On vérifie immédiatement sur la figure l'exactitude de la formule (2), parce que la somme des rectangles *abmc*, *cdne*, *eutz*, ... est équivalente au rectangle $1ab2$.

Faisons encore une remarque. L'hyperbole équilatère divise chacun des rectangles *abmc*, *cdne*, *eutz*, ... en deux parties qui, en raison de la convexité de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, sont inégales. La partie qui reste au-dessous de la courbe (triangles non hachurés) est moindre que celle qui reste au-dessus (triangles hachurés). Et ainsi, la constante d'Euler est plus grande que $\frac{1}{2}$ (C $= 0.57721...$) tandis que la constante C' est moindre que $\frac{1}{2}$ ($C' = 0.42278...$).

Mais les rectangles seront divisés par leurs diagonales *ac*, *ce*, *ez*, ... en deux triangles égaux, dont les sommes vaudront $\frac{1}{2}\cdot$ En conséquence, entre l'hyperbole équilatère et ces diagonales, qui sont des cordes de la courbe, seront compris un ensemble de segments ou lunules, dont les aires auront pour somme $C - \frac{1}{2}$, soit 0.07721... En calculant analytiquement la somme des aires de ces segments ou lunules, on obtient identiquement $C - \frac{1}{2}$: leur considération ne présente, donc, aucune utilité pour le calcul de C.

VI. — Série double dont la somme est égale a la constante d'Euler.

A propos de la constante d'Euler, je vais mentionner une série double dont la somme est égale à la valeur de la constante; quoique ce sujet ne représente pas « un appel à l'intuition géométrique », je crois qu'il n'est pas trop déplacé ici.

Posons le développement de log nép n en série de Taylor à partir du développement de log nép $(n - 1)$

$$\log \text{nép}\, n = \log \text{nép}\, (n-1) +$$

$$+ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + \frac{1}{3(n-1)^3} - \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{s(n-1)^s}\cdot$$