

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES DE LA FORME
 $a^m + b^m$
Autor: KULAKOFF, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28589>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES DE LA FORME $a^m + b^m$

PAR

A. KULAKOFF (Moscou).

Dans mon travail: *Sur quelques propriétés des groupes finis*¹ j'ai démontré le théorème suivant: soit p un nombre premier impair, et α un nombre entier tel que $\alpha^p \equiv 1 \pmod{k}$. Alors une congruence linéaire de la forme:

$$(\alpha^{i+1} - 1)x \equiv \alpha^i - 1 \pmod{k}, \quad (1 \leq i \leq p - 2)$$

admet nécessairement une solution.

C'est en essayant de généraliser ce théorème que je suis arrivé aux résultats du présent article.

§ 1. — Soient a et b deux nombres entiers positifs, premiers entre eux, et tels que $ab \not\equiv 1$. Nous allons démontrer que le plus grand commun diviseur d des nombres $a^m + b^m$ et $a^n + b^n$ divise l'un au moins des nombres $a^\delta + b^\delta$ et $a^\delta - b^\delta$, où $\delta = (m, n)$.

Soit $m \geq n$. Si m est divisible par n , le théorème est évidemment vrai.

Supposons maintenant que

$$m = \nu n + \sigma_1 \quad (1 \leq \sigma_1 < n)$$

$$n = \sigma_1 n_1 + \sigma_2 \quad (0 \leq \sigma_2 < \sigma_1)$$

.

¹ *Recueil mathématique* (nouvelle série), t. 1, fasc. 2, p. 253 (1936).

Il est clair que d divise le nombre

$$a^m + b^m - b^{m-n}(a^n + b^n) = a^n(a^{m-n} - b^{m-n}).$$

Or d est premier à a^n , puisque d est un diviseur de $a^n + b^n$, donc d divise $a^{m-n} - b^{m-n}$.

Il en résulte que d divise aussi le nombre

$$a^{m-n} - b^{m-n} + b^{m-2n}(a^n + b^n) = a^n(a^{m-2n} + b^{m-2n}),$$

et par suite le nombre $a^{m-2n} + b^{m-2n}$.

En continuant ainsi, nous démontrerons que d divise l'un au moins des nombres $a^{\sigma_1} + b^{\sigma_1}$ et $a^{\sigma_1} - b^{\sigma_1}$. Si donc $\sigma_2 = 0$, le théorème est démontré. Si $\sigma_2 > 0$, d divise l'un des nombres $a^{\sigma_2} + b^{\sigma_2}$ et $a^{\sigma_2} - b^{\sigma_2}$.

En répétant au besoin ces raisonnements, nous établirons complètement notre théorème.

On obtient des résultats analogues pour les nombres $a^m + b^m$ et $a^n - b^n$, ainsi que pour les nombres $a^m - b^m$ et $a^n + b^n$.

Considérons à présent le cas des nombres $a^m - b^m$ et $a^n - b^n$. En suivant la marche qui a été indiquée plus haut, on démontrera que d divise $a^\delta - b^\delta$. Mais d est en même temps divisible par $a^\delta - b^\delta$, puisque δ divise chacun des nombres m et n , donc $d = a^\delta - b^\delta$.

Etudions encore le cas où m est un nombre impair, et $(m, n) = 1$. Alors $d = (a^m - b^m, a^n + b^n)$ divise 2.

En effet, dans ce cas d divise l'un au moins des nombres $a + b$ et $a - b$. Mais $(a^m - b^m, a + b)$ divise 2. On déduit cela de ce fait que même $d' = (a^m - b^m, a^m + b^m)$ divise 2, puisque d' divise

$$(a^m + b^m) + (a^m - b^m) = 2a^m,$$

et $(a^m - b^m, 2a^m)$ divise 2.

On démontrera de même que $(a^n + b^n, a - b)$ divise 2. Notre théorème est donc établi.

En particulier, si l'un des nombres a et b est pair et l'autre impair, alors $(a^m - b^m, a^n + b^n) = 1$.

Admettons à présent que $m = p$ soit un nombre premier impair. Alors chacun des nombres

$$\left(\frac{a^p - b^p}{a - b}, a^{p-i} - b^{p-i} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, p - 1)$$

divise p .

En effet, comme $(p, p - i) = 1$, on a

$$(a^p - b^p, a^{p-i} - b^{p-i}) = a - b,$$

d'où il suit, en vertu d'un théorème connu¹, que

$$\left(\frac{a^p - b^p}{a - b}, a^{p-i} - b^{p-i} \right) = \left(\frac{a^p - b^p}{a - b}, a - b \right)$$

divise p .

En se servant des résultats précédents, on obtiendra sans peine le théorème suivant: *Si $(a, b) = 1$, $a - b \not\equiv 0 \pmod{2}$ et d'ailleurs $\left(\frac{a^p - b^p}{a - b}, a - b \right) = 1$, alors $\frac{a^p - b^p}{a - b}$ est premier à chacun des nombres.*

$$a^{p-1} - b^{p-1}, a^{p-2} - b^{p-2}, \dots, a^2 - b^2,$$

ainsi qu'à chacun des nombres

$$a^p + b^p, a^{p-1} + b^{p-1}, \dots, a^2 + b^2.$$

§ 2. — Nous allons indiquer maintenant quelques applications des théorèmes précédents.

Soit $(a, b) = 1$ et $ab \neq 1$. Alors on peut démontrer le théorème suivant. *Pour qu'un nombre p soit premier, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur des nombres $a^p - b^p$ et $a^i - b^i$ ($i = 1, 2, \dots, p - 1$) soit égal à $a - b$.*

Cette condition est nécessaire, d'après le théorème sur le plus grand commun diviseur des nombres $a^m - b^m$ et $a^n - b^n$ établi dans le § 1.

Elle est aussi suffisante. En effet, si $p = tu$ ($t > 1$, $u > 1$), alors $(a^p - b^p, a^u - b^u) \neq a - b$, puisque

$$a^p - b^p = a^{tu} - b^{tu} = (a^u - b^u)(a^{u(t-1)} + a^{u(t-2)}b^u + \dots)$$

est divisible par $a^u - b^u > a - b$.

¹ Voir par exemple E. LUCAS, *Théorie des nombres*, t. 1, p. 341.

Considérons à présent une congruence linéaire de la forme :

$$(a^i - b^i)x \equiv a^j - b^j \pmod{k}, \quad [(i, \mu) = (j, \mu) = 1], \quad (1)$$

où $(a, b) = 1$, $ab \neq 1$ et d'ailleurs $a^\mu \equiv b^\mu \pmod{k}$.

Cette congruence admet une solution.

En effet, comme $(i, \mu) = (j, \mu) = 1$, nous avons :

$$(a^\mu - b^\mu, a^i - b^i) = (a^\mu - b^\mu, a^j - b^j) = a - b.$$

Si donc $(k, a - b) = \delta$, on a aussi $(k, a^i - b^i) = (k, a^j - b^j) = \delta$.

Par conséquent, la congruence (1) est équivalente à la suivante :

$$Ax \equiv B \pmod{k'},$$

où

$$A = \frac{a^i - b^i}{\delta}, \quad B = \frac{a^j - b^j}{\delta} \quad \text{et} \quad k' = \frac{k}{\delta}.$$

Comme A et k' sont premiers entre eux, notre théorème est démontré.

En posant $b = 1$, $j = i - 1$ et $\mu = p$, nous retrouvons le théorème qui a été établi par l'auteur dans l'article cité plus haut.

Mais ce dernier résultat n'est pas nouveau¹, puisqu'il découle immédiatement de ce fait connu que les nombres $\frac{x^m - 1}{x - 1}$ et $\frac{x^n - 1}{x - 1}$, où x est un nombre entier positif distinct de 1, sont premiers entre eux, toutes les fois que m et n le sont².

A son tour, ce théorème se laisse généraliser de la manière suivante: *Les nombres $\frac{a^m - b^m}{a - b}$ et $\frac{a^n - b^n}{a - b}$, où $(a, b) = (m, n) = 1$ et $ab \neq 1$, sont premiers entre eux.* Ce résultat paraît être nouveau.

¹ J'ai appris cela quelque temps après la publication de mon travail.

² Voir: H. C. POCKLINGTON, The divisors of certain arithmetical forms, etc. *Proceedings. Cambr. Philosoph. Soc.*, v. 16, p. 7 (1911).