Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

Paul APPELL. — **Analyse mathématique.** Cours de Mathématiques générales à l'usage des Candidats au Certificat de Mathématiques générales et aux Grandes Ecoles. D'après les Cours professés à l'Ecole Centrale et à la Sorbonne. Cinquième édition, entièrement refondue par Georges VALIRON. Tome I. Analyse des Courbes. Surfaces et Fonctions usuelles. Intégrales simples. — Un volume in-8° de VIII-396 pages et 145 figures. Prix: 100 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

Il n'est pas besoin de signaler longuement ce Traité d'Analyse élémentaire devenu Cours de Mathématiques générales, Traité ou Cours en lequel Paul Appell vit toujours. Il a fallu que ce grand savant fut un bien prestigieux professeur pour que, maintenant encore, il y ait intérêt à conserver l'allure globale de son enseignement. Mais ce prestige est encore chose si connue qu'il est inutile d'insister. Rappelons, si ce n'est encore superflu, que les Cours de Mathématiques générales ont été créés, dans toutes les Universités françaises, sur l'initiative de Paul Appell et qu'il fut le premier à donner cet enseignement à la Sorbonne voici environ trente-cinq ans. Le besoin en était tel qu'il fallut, lors des premières leçons, déménager d'amphithéâtres en amphithéâtres, sans arriver à en trouver un qui fut suffisamment grand pour éviter des auditeurs prenant des notes debout dans des coins. Un tel succès a persisté depuis. Les éditions se sont suivies. Voici la cinquième qui semble devoir se partager en deux volumes au moins. Que pourrait-on ajouter pour prôner l'excellence de la conception.

On peut toutefois se demander ce que nous devons ici à M. Georges Valiron. D'abord il semble qu'il ait incorporé à l'ouvrage des notions et notations vectorielles empruntées au *Traité de Mécanique* de Paul Appell. Il a développé, de plus, la Géométrie analytique. Les exemples calculés semblent aussi avoir augmenté en nombre. Quoiqu'il en soit, il y en a beaucoup, si bien que le texte est tantôt celui d'un Traité, tantôt celui d'un Recueil d'exercices. Les élèves des Facultés et des Lycées y trouveront certainement un merveilleux instrument de travail mais le travailleur solitaire ne sera pas moins avantagé. Que de fois Paul Appell s'est préoccupé de celui-là.

A. BUHL (Toulouse).

Elie CARTAN. — **La Théorie des Groupes finis et continus et la Géométrie différentielle traitées par la Méthode du Repère mobile.** Leçons professées à la Sorbonne et rédigées par Jean Leray (Cahiers scientifiques. Direction G. Julia. Fascicule XVIII). — Un volume gr. in-8° de VI-272 pages. Prix: 100 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

C'est avec un plaisir aussi intense qu'émerveillé que l'on parcourt ces Leçons que M. Elie Cartan a peut-être faites sous une forme un peu plus

brève mais que M. Jean Leray a développées en auditeur consciencieux voulant se prouver à lui-même que tout était facilement compréhensible, que tout faisait image.

Il est banal de répéter que les idées simples viennent rarement les premières et que les grandes théories scientifiques, à lumineux avenir, ont généralement commencé sous des formes abstruses. Mais, s'il est une théorie qui vérifie cette dernière assertion, c'est bien celle des groupes de Sophus Lie. Aujourd'hui tout est clair et les points de départ semblent tout ce qu'il y a de simple et de naturel. On peut partir des formules stokiennes

$$\int_C P_l^s \, dx_l = \int\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ P_i^s & P_j^s \end{vmatrix} dx_i \, dx_j$$

où il y a n variables x_l et n indices s. Il est alors indiqué de se demander s'il est bien toujours nécessaire d'avoir, sous l'intégrale double, une forme différentielle bilinéaire spéciale; au moins dans des cas à préciser, ne pourrait-on s'arranger à exprimer toute la formule rien qu'avec les formes linéaires

$$\pi^s = P_l^s \, dx_l$$

du premier membre ? Ainsi, on devrait avoir

$$\int_C P_l^s \, dx_l = c_{nm}^s \int\int_S (P_j^m \, dx_j)(P_k^n \, dx_k) \ ,$$

les c à trois indices étant des constantes à déterminer. La comparaison des deux intégrales doubles donne immédiatement le fameux système de Maurer-Cartan

$$[\pi^s]' + c_{mn}^s [\pi^m \pi^n] = 0 \ ,$$

écrit ainsi avec les notations abrégées de la multiplication extérieure, et les non moins fameuses relations structurales

$$c_{ij}^s + c_{ji}^s = 0 \ , \qquad c_{si}^m c_{jk}^s + c_{sj}^m c_{ki}^s + c_{sk}^m c_{ij}^s = 0 \ .$$

Or le système de Maurer-Cartan généralise le système fondamental que Gaston Darboux mit à la base de sa théorie du trièdre mobile. Première façon d'atteindre et de généraliser la géométrie telle que l'entendait Darboux. Il y en a une autre. Le déterminant symbolique qui figure, ci-dessus, dans la formule stokienne, peut supporter la substitution de nouveaux symboles D aux symboles de dérivation ∂. On arrive ainsi aux *dérivées covariantes* non permutables qui, de ce fait, donnent naissance à des symboles à quatre indices trahissant la courbure d'un espace de Riemann. Et comme un espace de Riemann à deux dimensions est une surface ordinaire on parvient à nouveau à la géométrie différentielle tangible puis à ses hyperformes.

Telles sont, il me semble, les *conclusions* qui se dégagent de l'exposé de M. Elie Cartan mais au lieu d'aller à ces conclusions, comme je viens de le

faire, par une voie où tout est condensé à l'extrême, l'illustre géomètre a préféré le détail préparateur et l'élégance initiatrice des aperçus géométriques proprement dits.

Il n'en subsiste pas moins que les transformations infinitésimales, si importantes dans l'œuvre de Lie, sont maintenant choses de second plan. La théorie *différentielle* de ces transformations est avantageusement remplacée par la théorie des formes de Pfaff telles que π^s, théorie *intégrale* puisque lesdites formes sont toujours à placer mentalement sous des symboles d'intégration. Ceci est conforme à la marche générale de la Science, les points de vue différentiels s'effaçant, de plus en plus, devant les points de vue intégraux.

Une autre caractéristique de l'ouvrage est le recours aux constructions singulières, généralement imaginaires, qui s'insèrent dans le réel pour le mieux ordonner. Telle est la théorie des courbes minima, courbes pour lesquelles le recours au trièdre de Frenet perd toute signification. Les tangentes sont isotropes, les *ds* sont nuls et cependant il y a une courbure fonction arbitraire d'un pseudo-arc. Et ce qui paraît virtuel, sur une courbe minima, peut donner des procédés analytiques constructifs dans le cas des surfaces minima. C'est le cas de la microstructure isotrope qui éclaire la théorie d'une propagation lumineuse réelle. Ces réflexions ne donnent qu'une idée bien faible du caractère esthétique du livre. Répétons que la notation symbolique puissante mais abstraite ne domine pas seule. Tous les faits géométriques qu'elle tend souvent à dissimuler sont, au contraire, utilisés avec un art qui n'implique plus la notion d'effort. N'est-il pas prodigieux que les théories de Lie en soient là maintenant ?

A. Buhl (Toulouse).

Léon Brillouin. — **Les Tenseurs en Mécanique et en Elasticité.** Cours de Physique théorique. — Un volume gr. in-8° de 372 pages avec nombreuses figures. Prix: 120 francs. Masson & Cie, Paris, 1938.

Bel ouvrage qui servira une grande cause. Nous a-t-on assez dit que les théories relativistes et tensorielles n'étaient que des constructions mathématiques dont le physicien n'avait que faire. Bien plus, je pourrais citer des physiciens qui enseignent encore qu'on ne doit pas avoir recours à ces constructions dans un domaine véritablement physique ! M. Léon Brillouin écrit le présent livre pour que le physicien s'arme des méthodes nouvelles qui d'ailleurs commencent à dater. Le Calcul tensoriel, ou Calcul différentiel absolu, date de Riemann, Christoffel, Voigt, Bianchi, Ricci et Levi-Civita. Il doit des perfectionnements merveilleux à M. Elie Cartan. La Théorie des surfaces ne peut plus s'en passer, la cristallographie, la simple mécanique, l'élasticité, la thermodynamique des solides l'exigent impérieusement. Nous n'avons jamais manqué, ici, de dire toute notre admiration pour l'œuvre d'Albert Einstein et cependant c'est un fait qu'il n'y a pas de calcul einsteinien. Einstein a seulement eu recours à des théories métriques et nous a montré comment on pouvait en faire surgir des lois physiques. Tel est le beau thème qui est repris par M. Léon Brillouin. Disons tout de suite que ce thème est étendu, au delà de l'équation de D'Alembert, vers la Mécanique ondulatoire. Et il semble qu'il y ait là un lot de grandes idées, lot bien suffisant pour présenter dignement l'ouvrage. Détaillons cependant un peu plus et considérons notamment les titres des douze chapitres:

I. *Remarques générales. Tenseurs. Matrices.*
II. *Géométrie vectorielle. Définition des tenseurs.*
III. *Pseudo-tenseurs. Densités et Capacités tensorielles.*
IV. *Opérateurs différentiels utilisables en Géométrie vectorielle.*
V. *Transport parallèle. Dérivée covariante en Géométrie affine.*
VI. *Géométrie métrique. Espace de Riemann.*
VII. *Opérateurs différentiels et dérivée covariante en Géométrie métrique.*
VIII. *Mécanique rationnelle et emploi des Géométries de Riemann..*
IX. *Passage à la Mécanique ondulatoire.*
X. *Elasticité.*
XI. *Ondes élastiques dans les solides.*
XII. *La Théorie des solides et les Quanta.*

Cette simple énumération révèle un plan magnifique. En I, il est naturel que l'on parle tout de suite des tenseurs puisque l'ouvrage leur est consacré. Mais la matrice apparaît immédiatement aussi; c'est, par excellence, l'instrument algébrique de la transformation vectorielle. On peut commencer par là et finir par là avec Dirac; c'est aussi le commencement d'une théorie matricielle analogue à la Théorie des fonctions analytiques. Comparer avec ce qui concerne, ci-après, l'ouvrage Volterra-Hostinsky.

Ensuite III s'oppose à II en diminuant la débauche d'indices du calcul pur. Tous les indices sont logiquement utiles mais, comme l'a encore remarqué M. Elie Cartan, leur abondance masque parfois la réalité géométrique. Il en est de même pour la réalité physique. Il faut savoir condenser. Quant aux densités et capacités, leur apparition a lieu, au fond, sous des signes d'intégration qui ne portent originairement que sur l'étendue géométrique. C'est la mesurabilité de cette étendue qui tend à prendre un caractère physique. D'où, de même, en IV, les laplaciens, les rotationnels, les divergences. Ce n'est encore que l'étendue qui s'organise.

En V, la notion de transport conduit au parallélisme, à un parallélisme qui n'a pas encore besoin d'être métrique et s'accomode tout simplement de la dérivation covariante. Ceci avec une notion générale de courbure.

La Géométrie devient métrique en VI. La métrique est naturellement celle de Riemann. Cela permet d'arriver, en VII, aux géodésiques riemanniennes auxquelles correspondent des mouvements ponctuels tels les mouvements planétaires de la Relativité généralisée. De toutes façons, on touche ici au monde des équations générales d'Einstein.

En VIII, tout naturellement aussi, nous revenons à la Mécanique classique où les constructions énergétiques les plus simples nous donnent des ds^2 de structure riemannienne. Comment se fait-il qu'il y ait encore des hommes de science qui ne voient pas ces admirables harmonies si ce n'est sous des formes qu'ils combattent ? Je pose sincèrement la question sans apercevoir de raison satisfaisante.

Soyons brefs pour les quatre derniers chapitres qui sont ondulatoires et quantiques. L'énergétique s'étend ici aux formes thermiques. Les ondes élastiques conduisent aux pressions de radiation. Les périodicités se figent en quanta. C'est d'une beauté physique incomparable et d'une philosophie profonde. C'est vraiment digne du Collège de France. Grands recours aux ouvrages de M. Bruhat. Emprunts habiles à Weyl, Eddington, De Donder. En province, nous sommes bien quelques-uns, comme M. Bouligand et moi,

qui avons publié et publions des Cours sur ces captivantes questions. M. Léon Brillouin ne nous en voudra certainement pas de signaler cette communion de pensée et d'action. A. BUHL (Toulouse).

G. DOETSCH. — **Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band XLVII). — Un volume gr. in-8° de VIII-436 pages. Prix: RM. 34.50 broché, 36.30 relié. J. Springer, Berlin, 1937.

L'auteur n'est pas à présenter à nos lecteurs. Il a brillamment participé aux *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève avec une Communication sur *Les Equations aux dérivées partielles du type parabolique* dont on trouvera un résumé dans *L'Enseignement mathématique* (**35,** 1936, p. 43). On peut observer tout de suite qu'entre la transformation de Laplace et les équations aux dérivées partielles, il y a des liens qu'on pourrait d'abord ne pas soupçonner. On les trouve dans la Communication indiquée, par exemple page 62, mais il y avait, de plus, dans la conception laplacienne, tant et tant de choses à l'état latent qu'on peut y voir les germes d'immenses domaines explorés depuis par l'Analyse en ses formes les plus variées. C'est ainsi, par exemple, que le Calcul symbolique de Heaviside a son origine dans la célèbre transformation. Quant à ses aboutissements, ils sont dans les branches les plus récentes de la Physique théorique.

L'idée fondamentale, comme pour toutes choses à grand rendement, est extrêmement simple. Il s'agit d'intégrales en $e^{-st}\,F(t)\,dt$ prises d'abord le long de la demi-droite réelle D qui va de zéro à l'infini. On a ainsi une fonction $f(s)$ à étudier connaissant $F(t)$ à moins qu'il ne faille inversement rechercher F connaissant f. C'est déjà la théorie des équations intégrales qui apparaît. Quant au problème direct, on conçoit son analogie avec celui de la fonction analytique donnée par un ensemble de coefficients tayloriens, problème qui est d'ailleurs dépassé et peut être remplacé par une étude générale des séries de Dirichlet.

On sait aussi que M. Emile Borel a d'abord construit sa théorie du polygone de sommabilité en utilisant une intégrale laplacienne; la chose a été ingénieusement étendue en remplaçant la demi-droite D par des chemins d'intégration plus quelconques. Le polygone borélien peut alors acquérir des côtés circulaires. Ce résultat est rapporté par M. Doetsch à ses propres travaux ainsi qu'à divers autres dus notamment à Pincherle et à Rey Pastor. Que l'on me permette d'ajouter que j'ai donné quelque chose d'analogue, en 1911, dans les *Acta mathematica* ainsi que dans mon fascicule VII du *Mémorial des Sciences mathématiques* (1925, p. 15).

Quant à l'inversion complexe de l'intégrale de Laplace, elle conduit aussi, très immédiatement, aux théorèmes intégraux de Fourier ainsi qu'à une certaine transformation de Mellin à laquelle s'associe la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Comme synthèse, ce n'est déjà pas mal et cependant ce n'est qu'un commencement. Il n'est pas toujours aisé de déterminer F connaissant f ni même d'apercevoir toutes les propriétés de f en partant de celles de F mais il y a une très intéressante théorie de transformations fonctionnelles des f qui se *représente* beaucoup plus simplement sur les F. C'est d'ailleurs là l'idée même d'un calcul symbolique d'une très grande puissance. Telles sont les idées directrices d'une Première partie de l'ouvrage.

Une Seconde partie, très brève, a trait aux développements en série. Les propriétés différentielles linéaires de l'exponentielle apparaissent ici comme un trait d'union entre nombre de séries appartenant à des domaines très divers.

Une Troisième partie a trait au comportement asymptotique. Nous y retrouvons les conditions de convergence uniforme selon Abel puis suivant des lemmes plus généraux de Tauber. Ici, les séries interviennent encore abondamment mais l'essentiel est dans les critères intégraux qui les accompagnent. Signalons un aboutissement à une transformation intégrale de Stieltjes, liée, elle-même, au « logarithme intégral ». D'autre part, pour tout ce qui se rapporte à la croissance exponentielle, il est indiqué de rechercher des représentations laplaciennes. Ce n'est que l'extrême richesse de telles réussites qui empêche d'entrer ici dans de plus grands détails.

Une Quatrième partie est consacrée aux équations intégrales, celles-ci étant prises d'abord sous les formes habituelles dues à Volterra, Fredholm, Hilbert, Schmidt, ...; mais l'auteur va commencer par les étudier dans les domaines où elles peuvent être représentées sous des formes laplaciennes. L'idée est remarquablement simple et donne beaucoup de calcul élémentaire là où d'autres ouvrages mettent, tout de suite, du calcul symbolique. D'ailleurs, M. Doetsch aime les schèmes simples tels celui dessiné page 280. Il faut trouver des transformations fonctionnelles avantageuses du compliqué. La transformation de Laplace en est une. Qu'on la prenne pour modèle. On remonte ici jusqu'à l'équation d'Abel et aux dérivées d'indices non entiers. Suivent des théorèmes d'addition *transcendants* qui, par rapport aux théorèmes algébriques, ne sont pas plus étonnants que les nouvelles dérivées par rapport à celles d'indices entiers. Les indices non entiers semblent même pouvoir se généraliser dans le domaine complexe.

La Cinquième partie a trait aux équations différentielles ordinaires ou partielles. C'est ici que se place le fameux Calcul de Heaviside. Nombreuses applications physiques.

Belle œuvre, moderne par sa nature *intégrale* mais d'un intégralisme à transformations et à calculs effectifs. Nous n'avons jamais négligé de dire du bien des théories intégrales en espaces abstraits. Nous n'en sommes que plus à l'aise pour juger, avec enthousiasme, les concrétisations de M. Doetsch.

A. Buhl (Toulouse).

R. Courant und D. Hilbert. — **Methoden der mathematischen Physik.** Zweiter Band (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XLVIII). — Un volume gr. in-8° de xvi-550 pages. Prix: RM. 38 broché, 39,80 relié. J. Springer, Berlin, 1937.

La seconde édition du Tome I de cet ouvrage a été analysée ici (**30,** 1931, p. 165). Le présent Tome II contient des Compléments bibliographiques qui renvoient aux mêmes *Conférences*, de l'Université de Genève, que celles indiquées tout à l'heure à propos du livre de M. G. Doetsch. Relevons même la citation détaillée des noms de MM. Hadamard, Doetsch, Vasilesco, Weinstein, Schauder, Leray. Ainsi *L'Enseignement mathématique* se révèle d'une utilité de premier ordre, puisqu'il complète de grands ouvrages tels celui de MM. Courant et Hilbert, et que d'autre part, il simplifie la tâche de la critique bibliographique puisqu'il n'y a plus qu'à revenir sur des textes analogues à ceux déjà insérés dans notre Revue.

Une courte note nous présente ce volume comme ne dépendant pas essentiellement du précédent. Il se suffit à lui-même quant à l'étude des équations aux dérivées partielles telles qu'on doit les considérer en Physique mathématique. Il fait finalement appel au Calcul des variations et aux problèmes de valeurs propres. Le tout est divisé en sept chapitres.

Le Chapitre I est intitulé: *Vorbereitung. Grundbegriffe.* Il se rapporte aux généralités relatives aux procédés de construction des solutions. Pour les équations en x, y, u, p, q, les points traités pourraient aussi bien commencer un traité de géométrie. Il s'agit d'intégrales complètes, d'enveloppes, d'équations à intégration intuitive. Le point de vue devient plus particulièrement physique lorsqu'il s'agit de déterminer des solutions par des conditions initiales. Pour les solutions analytiques, on remonte jusqu'à Cauchy et Sophie Kowalewski.

Le Chapitre II introduit la notion des *caractéristiques.* Il remonte même, plus loin que Cauchy, jusqu'aux systèmes sous-déterminés de Monge mais son principal objet est indéniablement la théorie de Jacobi-Hamilton qui, des considérations caractéristiques, passe aux considérations *canoniques.* L'équation aux dérivées partielles de Jacobi est alors comprise dans l'ensemble des équations de la Physique; on sait l'importance de cette inclusion pour les développements de la Mécanique ondulatoire.

Le Chapitre III traite des équations linéaires en général. Formes normales: elliptique, hyperbolique, parabolique. On parvient déjà à la construction *matricielle* d'équations et de systèmes tels ceux qui ont prolongé la Théorie de Maxwell dans les voies hardies où se sont engagés Dirac et Louis de Broglie. Les ondes apparaissent planes, cylindriques, sphériques avant d'être des lieux de discontinuité plus quelconques. Les représentations intégrales abondent. L'algorithme laplacien de M. Doetsch se retrouve naturellement lié au Calcul symbolique de Heaviside.

Le Chapitre IV est elliptique et contient la Théorie du potentiel. C'est toujours sur cette dernière théorie que s'essaient les conditions aux limites avant de se transporter, avec généralisation, aux cas elliptiques plus quelconques. A signaler un lemme de F. Rellich sur l'équation de Monge-Ampère du type elliptique, lemme d'après lequel il y a, au plus, deux solutions de l'équation prenant les mêmes valeurs sur une frontière. Les équations intégrales apparaissent également. La littérature se rapporte beaucoup à Picard, Goursat, Poincaré ainsi qu'à la *Potential Theory* de Oliver Dimon Kellogg jadis signalée par nous (**28**, 1929, p. 334) avec des éloges confirmés depuis en maintes directions.

Le Chapitre V est consacré aux équations hyperboliques à deux variables. C'est ici que les caractéristiques jouent un rôle particulièrement décisif comme lignes de discontinuité et qu'apparaissent les méthodes d'intégration de Riemann si bien continuées par G. Darboux, J. Hadamard et M. Emile Picard. Beaucoup de travaux ont donné l'impression que les cas elliptique et hyperbolique relevaient de méthodes entièrement différentes. Aussi convient-il de signaler ici des développements ou, moyennant l'introduction d'imaginaires, on peut passer d'un cas à l'autre et ce non sans élégance.

Le Chapitre VI continue le précédent mais avec un nombre quelconque de variables. J. Hadamard et T. Levi-Civita dominent. On reconnaît, une fois de plus, l'immense importance des notions caractéristiques justement par la facilité relative avec laquelle elles s'étendent dans l'hyperespace.

Il y a une géométrie des caractéristiques assez analogue à la géométrie riemanienne des $ds^2 = g_{ij}\, dx_i\, dx_j$. C'est pourquoi les théories ondulatoires ont toute la puissance des théories métriques les plus générales.

Pour les équations à coefficients constants, la représentation des solutions par intégrales multiples à noyau exponentiel redevient possible. A signaler les méthodes « de descente ». De même les lemmes de moyenne de Leifur Asgeirsson; c'est de la science à symétrie sphérique qui révèle cependant tout un nouveau monde singulier. Des ondes il faut passer au rayonnement. La fameuse surface des ondes de Fresnel, quoique répondant à un problème bien particulier, n'est cependant pas dédaignée. Mais, par contre, des vues sont ouvertes sur des généralisations presque inquiétantes. Quel cerveau les réalisera ?

Le Chapitre VII revient sur les problèmes précédents par les méthodes du Calcul des variations. Il atteint aux théorèmes d'existence de Douglas concernant le problème de Plateau.

L'ensemble donne, à coup sûr, l'impression d'un ouvrage de très haute science, parfois lacunaire comme montrant ce qui manque à côté de ce qui est acquis. Les emprunts à la science française y sont particulièrement à signaler. Les théories en jeu sont physiquement universelles et semblent pouvoir accueillir les contributions venant des formes les plus diverses de l'intelligence mathématique. A. Buhl (Toulouse).

Vito Volterra et Bohuslav Hostinsky. — **Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux Equations différentielles et fonctionnelles** (Collection de Monographies Em. Borel). — Un volume gr. in-8° de vii-238 pages. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1938.

Bel ouvrage sur le Calcul matriciel poussé jusqu'au Calcul fonctionnel inclusivement. Il s'agit d'un ancien Mémoire de M. Volterra (1887) relatif au Calcul différentiel et intégral des substitutions linéaires, Mémoire qui est maintenant complété et ramifié dans les domaines de la microphysique et du Calcul des Probabilités. C'est surtout là que l'influence de M. Hostinsky se fait sentir.

L'idée a toujours été dans l'air depuis qu'on a considéré les matrices comme les quantités ayant, il est vrai, une multiplication non commutative mais ce n'était pas celle-ci qui pouvait s'opposer à une Analyse convenablement généralisée. Et même, cette non-commutativité, si facile à constater au point de vue algébrique, ne demande qu'à jouer tout aussi élégamment dans le domaine infinitésimal. La différentiation s'applique aisément aux matrices et le calcul matriciel s'applique inversement à nombre d'opérations différentielles d'où des différentiations *à gauche* et *à droite* curieusement symétriques. Seulement — que l'on me permette de donner mon humble avis — ceci n'est plus maintenant aussi original que pourrait le croire quelque jeune néophyte qui ne s'en rapporterait qu'à l'ouvrage de MM. Volterra et Hostinsky. Ces deux illustres savants sont gens de génie; quand ils touchent à une question, ils ont l'air de la renouveler entièrement. Cependant quelques comparaisons avec l'état antérieur des choses, me viennent à l'esprit. Ainsi, pages 78 et 79, à propos de la constitution de différentielles exactes, on trouve tout un symbolisme, sinon identique, du moins analogue à celui de la Théorie des groupes. Il y a même là deux systèmes (5) comparables à ceux de Maurer-Cartan

ou à ceux de la Théorie du trièdre mobile à moins qu'on ne préfère les rapprocher des symboles de Riemann nés de la non-permutabilité des dérivées covariantes.

Mais, de toutes façons, l'intérêt est immense. Les faits ici, comme dans les travaux de M. Elie Cartan, sont les transformations et non les objets transformés. Et, quant à la peinture des transformations, le tempérament personnel intervient et peut donner des coloris extrêmement divers. La symétrie et l'esthétique sont particulièrement admirables. Les substitutions ont leurs intégrales curvilignes, leurs lacets, leurs surfaces de Riemann, leurs résidus. Le théorème de Cauchy s'étend alors aux équations différentielles linéaires conformément aux idées de L. Fuchs mais avec un aspect beaucoup plus simple que celui de l'appareil fuchséen.

Les transformations fonctionnelles conduisent aux équations intégrales. Il convient de signaler particulièrement l'équation de Chapman, accompagnée de tout un symbolisme itératif qui change des solutions d'une première équation en d'autres solutions appartenant à celle-ci ou à des équations de structure voisine.

Au fond, les auteurs n'ont point renoncé aux procédés d'autrefois; les méthodes ensemblistes actuelles n'interviennent guère. Les esprits qui ne peuvent se plier à ces dernières — il y en a — trouveront ici une analyse élevée mais de facture particulièrement classique.

Une bibliographie, qui ne comprend pas moins de 35 citations commentées, termine ces belles pages avec nombre de noms français: Appell, Picard, Fréchet, Hadamard, Tannery et Molk. J'aimerais, comme plus haut, à y ajouter Elie Cartan. Et je crois que l'intérêt augmenterait encore si l'on tentait d'établir des comparaisons avec le livre dont l'analyse est faite plus haut dans cette même Bibliographie. Mais n'est-ce pas une chose qui se fera d'elle-même ? A. Buhl (Toulouse).

S. Stoïlow. — **Leçons sur les Principes topologiques de la Théorie des Fonctions analytiques** professées à la Sorbonne et à l'Université de Cernauti (Collection de Monographies Em. Borel). — Un volume gr. in-8° de x-148 pages. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1938.

Ici les méthodes ensemblistes interviennent. C'est même l'essentiel. Au point de vue bibliographique nous pourrons être bref et renvoyer le lecteur à un article de M. B. de Kerékjártó, *Sur la structure des transformations topologiques des surfaces en elles-mêmes*, article publié dans *L'Enseignement mathématique* (**25,** 1936, p. 297). C'est, au moins, l'une des faces de la question traitée par M. Stoïlow.

L'homéomorphie de deux surfaces, transformées l'une en l'autre, n'intéresse pas précisément les surfaces transformées; tout l'intérêt est dans le procédé de transformation. Soulignons, une fois de plus, que c'est là l'esprit moderne qui ne s'attache qu'à l'évolution des choses et non à un substratum qui ne leur est probablement prêté que par un travers de notre esprit.

Les surfaces de Riemann semblent bien être de naissance algébrique; elles ont grandi et s'épanouissent maintenant dans le domaine analytique, traduisant toutes les singularités comme toutes les généralités fonctionnelles nées parfois, comme le théorème de M. Picard, sous des aspects qui pouvaient sembler, au début, étrangers à la conception riemannienne.

Quant à l'ensemblisme, il n'est pas précisément exigé pour la question.

Il est la question même. On n'étudie pas les ensembles sans topologie et l'on ne fait pas de topologie sans ensembles. Ceux-ci interviennent même avec ce caractère paradoxal parfois suspect pour les uns, toujours séduisant pour les autres. M. Bouligand ne nous a-t-il pas rappelé, avec humour, dans sa *Géométrie infinitésimale directe* (p. 12), qu'il était permis d'admettre, avec Alfred de Musset, qu'une porte devait être ouverte ou fermée mais que cette nécessité ne s'imposait point aux ensembles. On pouvait encore croire que les ensembles, à la fois ouverts et fermés, sont des monstruosités, des choses exceptionnelles qui ne servent qu'à réjouir l'esprit spécialement ami du paradoxe. Pas du tout. Dans l'ouvrage de M. Stoïlow (p. 6), il faut les ensembles ouverts et fermés pour définir tout simplement l'espace *connexe*.

Plus loin, qui n'est pas prévenu ou entraîné est étonné du théorème de M. Brouwer qui n'exprime entre deux ensembles qu'une correspondance topologique de point intérieur à point intérieur. N'est-ce pas évident ? Non pas. Le théorème fait, au moins, partie de ces choses qui sont tellement fondamentales qu'il faut les examiner d'une manière particulièrement profonde si l'on ne veut ramener tout à une dangereuse intuition. D'ailleurs ce théorème a été préparé par René Baire et par M. Henri Lebesgue.

Les surfaces de Riemann sont « naturelles ». Elles représentent, par homéomorphie, la structure même du domaine analytique; le calcul, les considérations métriques peuvent n'intervenir qu'ensuite. Ce qui est mieux, c'est que les intelligences portées à examiner ainsi ledit domaine sont encore plutôt rares. Y en a-t-il, même, qui pourraient *commencer* par là ? Laissons cette troublante question. Mais il semble sûr qu'avec un certains acquis et au delà de certaines frontières, la vision topologique s'impose comme l'une des conditions du progrès.

A. Buhl (Toulouse).

Ernst Foradori. — **Grundgedanken der Teiltheorie.** — Un fascicule de IV-80 pages et 42 figures. Prix: RM. 4.80. S. Hirzel, Leipzig, 1937.

Fascicule captivant, assez inattendu, qui peut se rattacher, lui aussi, à la Topologie et qui essaie, non sans succès, de dégager de notions métriques les idées fondamentales de division, de partage, d'inclusion. Les groupes peuvent avoir des sous-groupes, les ensembles des sous-ensembles, tout ce qui peut réunir peut désunir. Si l'infini intervient, le paradoxe n'est pas loin. Certains esprits répugnent à admettre qu'un ensemble contenu dans un autre puisse cependant avoir même puissance. M. Ernst Foradori semble vouloir localiser de tels malaises, montrer comment ils peuvent se produire et être évités. Quand ils ne peuvent l'être, c'est qu'on se trouve dans des domaines qui ne sont point ceux de l'évaluation vulgaire.

Le continu peut être pourvu de singularités qui ne se retrouvent qu'incomplètement dans ses diverses parties. Une fragmentation habile peut aussi y faire apparaître des propriétés nouvelles de même que des coupures dans un morceau de littérature peuvent en changer le sens. On voit que les pensées fondamentales concernant le partage et la division ont, quand on le veut, une ampleur génératrice de bien des choses. Le schème géométrique peut être dépassé. Cependant il a été largement employé et l'auteur peut être suivi sans connaissances mathématiques élevées. L'exposé se termine avec un certain Principe de Dedekind et des considérations de continuité à placer, en effet, à la base de l'Analyse.

A. Buhl (Toulouse).

A. Buhl. — **Nouveaux Eléments d'Analyse.** Calcul infinitésimal. Géométrie. Physique théorique. Tome II. — Un volume gr. in-8° de VI-216 pages et 27 figures. Prix: 90 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1938.

Le Tome premier de cet ouvrage a été analysé dans notre dernier volume (p. 130). Il s'agit toujours du Cours d'Analyse infinitésimale de la Faculté des Sciences de Toulouse.

M. Buhl considère, avec beaucoup d'autres auteurs, qu'il y a une Analyse physique actuelle dont les éléments doivent faire partie de l'enseignement de l'Analyse tout court. C'est ainsi que ce dernier doit comprendre des notions de Calcul différentiel absolu.

Il y a aussi des oppositions sur lesquelles un mathématicien enseignant doit absolument s'expliquer. Joseph Boussinesq, guidé surtout par des considérations physiques, disait que les fonctions « avaient tout intérêt à avoir des dérivées ». Et voici qu'un savant actuel, M. Arnaud Denjoy, n'hésite pas à écrire: « La notion de dérivée est physiquement fausse ». Cette contradition est toute apparente et ne signifie pas que l'Analyse est partagée en domaines inconciliables. Elle signifie que de nombreuses généralisations ont abandonné les anciennes notions de continuité. Il faut savoir les retrouver, les reconstruire, en connaissance de cause, et faire place à ces fameuses discontinuités *quantiques* qui sont partout et que personne n'a le droit d'ignorer.

Le tome I ayant été consacré aux « Variables réelles », celui-ci l'est aux « Variables complexes ». Ce n'est pas le cas d'abandonner les dérivées. Dans un Chapitre préliminaire l'auteur fait, en raccourci, une Théorie des fonctions qui part des notions de parité et d'imparité, les généralise sous forme *cyclique*, passe par l'équation fonctionnelle $\varphi(ax) = b\varphi(x)$, ce qui permet d'atteindre immédiatement les fonctions simplement et doublement périodiques tout en observant que l'équation en litige admet des cas quantiques, à forme spéciale, quand a et b sont racines d'ordre n de l'unité. La même équation admet d'ailleurs, à la fois, des solutions analytiques et des solutions non-analytiques. D'autre part, elle est un cas particulier de l'équation d'Abel, laquelle permet d'atteindre aux fonctions modulaires et automorphes. Tout ceci, dans un seul chapitre, montre que la Science est survolée de haut, sans recherche préliminaire des détails et de la rigueur dont il faudra bien cependant se préoccuper ensuite. Mais il y a un bénéfice indéniable dans ces vues panoramiques. Elles expliquent comment des esprits, très jeunes mais bien doués, peuvent s'élever rapidement jusqu'aux limites de la connaissance mathématique et faire, sans longs tâtonnements, de très beaux apports dans ces régions limites.

Le Chapitre II est intitulé: Analyticité, Uniformité. Isogonalité. Il ne distingue pas immédiatement la monogénéité selon Cauchy de l'analyticité taylorienne de Weierstrass. Ces choses, longtemps confondues, ne le sont plus à l'heure actuelle grâce à d'ingénieux efforts séparateurs dus à M. Emile Borel, efforts qui ont abouti à la conception du *quasi-analytique*. Toutefois il n'est guère indiqué de commencer par là. Restons donc, d'abord, aux conditions de Cauchy, à l'équation de Laplace et à la représentation conforme entendues à la manière classique. Non cependant sans rencontrer déjà des opérateurs différentiels, à retrouver, au Chapitre VII, dans les récentes Théories de la lumière selon Dirac et Louis de Broglie. Ainsi le domaine analytique et le domaine lumineux seront des domaines fondamentaux et naturellement associables.

Le Chapitre III est consacré aux séries. Séries entières. Séries de fractions rationnelles avec des aboutissements tels que la fameuse fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Le Chapitre IV traite des résidus et de leurs applications. Il va jusqu'à la croissance des fonctions entières envisagée surtout sur la fonction $E_\alpha(x)$ de Mittag-Leffler, fonction qui ne croît indéfiniment que dans un angle d'ouverture $\alpha\pi$. C'est le chemin vers les fonctions entières, d'apparence paradoxale, qui semblent contredire le théorème de Liouville et qui cependant sont d'accords avec lui si l'on envisage la notion de chemin d'infinitude dans un esprit suffisamment subtil. Un peu plus loin, exemple de lignes singulières et de fonction quasi-analytique dont des intégrales définies très simples font tous les frais.

Le Chapitre V traite de la double-périodicité et de l'homographie, les deux choses étant liées de plusieurs manières, notamment par la fonction modulaire. Mentionnons les angles au point de vue projectif et la Géométrie de Cayley, timide esquise d'un Univers projectif.

Le Chapitre VI a trait aux Intégrales doubles à la Cauchy et à la Sommabilité. Réflexions philosophiques sur la divergence dépourvue de sens à laquelle correspondent cependant des procédés d'ordination sensés. Que de problèmes mal posés, dans l'infini philosophique, sont peut-être susceptibles de recevoir de telles corrections.

Le Chapitre VII et dernier est intitulé: Charles Hermite et la Physique théorique. C'est ainsi le chapitre des opérateurs *hermitiques*. Ceux-ci suffisent à indiquer les ponts entre équations canoniques, équations de Maxwell, Gravifique et Mécanique ondulatoire.

L'accord avec l'ouvrage de M. Léon Brillouin, analysé plus haut, est remarquable, bien que M. Buhl, chargé d'un enseignement d'Analyse n'ait pu faire, à la Physique théorique, qu'une place réduite. Du moins cette place est-elle très logiquement délimitée. H. FEHR.

Georges BOULIGAND. — **Précis de Mécanique rationnelle** à l'usage des Elèves des Facultés des Sciences avec un choix de Problèmes proposés à la Licence et à l'Agrégation et rédigés avec la collaboration de M. Jean Dollon. *Deuxième édition* revue et augmentée. — Un volume gr. in-8° de VIII-344 pages. Prix: 60 francs. Vuibert, Paris, 1937.

Voici seulement douze ans que j'analysais ici-même (**24,** 1924-25, p. 343) la première édition de ce livre. Revu et augmenté, il passe de 282 à 344 pages mais l'esprit n'en a point changé. En relisant ma première analyse, j'ai l'impression qu'il y a douze ans, M. Bouligand était hardi. Ses hardiesses ont triomphé, dans le domaine de la Mécanique et dans d'autres; il devient décidément le grand auteur classique, le digne successeur de Paul Appell.

J'hésite à revenir sur des choses déjà écrites, sur l'élégant emploi des notations vectorielles et sur l'énoncé des principes. Je suis cependant tenté de m'arrêter sur le mouvement à la Poinsot d'abord dégagé de considérations dynamiques.

Quant à la Dynamique analytique, elle repose, tout de suite, sur un extremum intégral; ce premier pas appartient, à la fois, à cette Dynamique et au Calcul des variations. Les lignes géodésiques conduisent aux multiplicités riemanniennes c'est-à-dire aux $ds^2 = g_{ik}dq_idq_k$. La Mécanique classique est certainement science métrique mais, à partir de ces ds^2, nous

avons le moyen de comprendre que tout ce qui est métrique, dans les mêmes conditions, peut engendrer des domaines géométrico-mécaniques extrêmement variés, domaines où d'ailleurs on retrouvera toujours des considérations géodésiques. Ceci me donne tout de suite envie de mentionner, comme l'auteur l'a fait dans la Préface du présent volume, que l'œuvre doit pouvoir servir d'introduction aux Mécaniques nouvelles, Mécaniques où parfois la notion de mesure semble s'évanouir. Du moins ladite notion aura-t-elle été poursuivie jusque sur les seuils où la Science prend, tout à coup, d'autres visages.

Nous voici donc très simplement et très philosophiquement en pays lagrangien, avec la « méthode des paramètres omnibus », l'action hamiltonienne, le Principe des travaux virtuels, les forces de liaison pouvant compenser, dans un système, une suppression de matière; enfin signalons l'analyse de la force vive, ou du ds^2, qui y fait apparaître, encore très naturellement, *covariance* et *contrevariance*.

Il y a des systèmes équivalents, de même qu'il y a des variétés applicables l'une sur l'autre. Le rôle des géodésiques sur les continus riemanniens rend la Gravifique d'Einstein de plus en plus proche.

Les chocs et percussions s'imposent rapidement. C'est peut-être le meilleur moyen d'étudier concrètement des successions de distributions de vitesses.

Les Problèmes de Dynamique sans frottement donnent un long chapitre où sont disséquées de nombreuses questions d'après le nombre des degrés de liberté; beaucoup de ces questions ont fait le sujet de compositions d'Agrégation.

Les questions de structure pour les équations de la Dynamique conduisent immédiatement aux systèmes canoniques. C'est ici qu'intervient l'invariant intégral de M. Cartan ou *invariant intégral cinétique*; la méthode de Jacobi suit. La réalité des trajectoires mène à des questions de topologie illustrées par Poincaré, Hadamard, Birkhoff, Hilbert, Weyl. En faisant ainsi de la Mécanique, on peut avoir recours aux plus hautes conceptions de l'Analyse; on peut arriver aux trajectoires dépendant de propriétés discontinues, *arithmétiques* des constantes d'intégration (p. 277). Les théories quantiques apparaissent.

Les ondes suivent, d'abord dans les fils puis dans les milieux. Après les notions quantiques, les notions ondulatoires sont préparées. La Science, selon Lagrange et Jacobi, est admirablement modernisée.

A. Buhl (Toulouse).

Georges Bouligand et Jacques Devisme. — **Lignes de Niveau. Lignes intégrales.** Introduction à leur Etude graphique. — Un volume in-8° de viii-154 pages et 62 figures. Prix: 30 francs. Vuibert, Paris, 1937.

Ceci est encore une dépendance de l'enseignement brillant et quasi-universel fait à Poitiers. MM. Maurice Barré et Gaston Rabaté y ont collaboré. Il s'agit d'une étude profonde, et cependant étonnamment élémentaire, des courbes réelles définies par une équation différentielle qui, en général, n'est pas élémentairement intégrable mais qui, même lorsqu'elle l'est, n'offre pas, par une intégration explicite, de meilleures images intégrales que celles qui naissent dans les *champs*, constructibles par *brins* infinitésimaux, déterminés, immédiatement ou à peu près, par l'équation

non intégrée. Et on a encore l'avantage, immense, de concevoir des réunions de ces brins autrement que par continuité analytique, ce qui élève à la dignité d'intégrale (pour parler comme M. Bouligand) une foule de microstructures ignorées par les anciennes théories classiques. Ces microstructures ne sont point abstractions quintessenciées; elles sont indispensables à la microphysique. D'autre part la disposition des courbes intégrales est souvent question topologique. Nous retrouvons là des conceptions de Poincaré, Dulac, O. Perron, T. Wazewski, S. K. Zaremba, ... avec toute une terminologie qui peut s'éclairer par constructions spatiales. D'ailleurs les 62 figures de l'ouvrage font nombre et montrent suffisamment comment l'intuition visuelle et directe peut jouer en la matière. Et chaque figure est, en elle-même, une merveille géométrique.

Quant aux travaux de H. Dulac, on pourra consulter *L'Enseignement mathématique* (**32,** 1933, p. 421). A. Buhl (Toulouse).

Henri Mineur. — **Technique de la Méthode des Moindres Carrés** (Monographies des Probabilités. Direction Emile Borel. Fascicule II). — Un volume gr. in-8° de viii-96 pages. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1938.

Nous avons déjà attiré l'attention sur ces Monographies probabilitaires qui doivent compléter le grand Traité publié sous la direction de M. Emile Borel. Le fascicule I, dû à M. Paul Lévy et consacré à la *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, a été analysé ici (36, 1937, p. 276).

Voici maintenant une œuvre de M. Henri Mineur qui peut être considérée comme une suite ou un développement de celle de M. Robert Deltheil consacrée, dans le grand Traité, aux *Erreurs et Moindres carrés* (voir *L'Enseignement mathématique*, 29, 1930, p. 186).

Le présent fascicule a pour but de permettre l'usage de la méthode des moindres carrés à tous ceux qui ont besoin d'appliquer cette méthode et que rebuterait l'étude mathématique du sujet.

Dans une première partie, la méthode est enseignée comme le sont les opérations de l'arithmétique dans l'enseignement le plus élémentaire: on décrit les opérations successives qu'il faut effectuer, sans accompagner cette description d'aucune théorie. Cette partie se termine par un exemple numérique. En suivant les indications données on peut appliquer le procédé presque sans le comprendre, de même que de nombreuses personnes font des divisions sans avoir jamais connu la théorie de cette opération.

Voilà qui est plus que remarquable. Toutes les opérations arithmétiques élémentaires se font presque toujours sans considérations théoriques. Plus avant, on rencontre des calculs de finance, notamment des calculs d'assurances, que des préposés convenablement entraînés font sans y réfléchir. Même chose pour des calculs balistiques, voire pour certains calculs de perturbations planétaires et pour d'autres encore. Réduire la méthode des moindres carrés à quelque chose d'analogue n'est peut-être pas une tentative absolument originale mais l'exposition de M. Henri Mineur l'est incontestablement. L'exemple qu'il traite, emprunté à l'Astronomie stellaire, dépasse de beaucoup, en généralité, certains procédés partiels machinalement fixés par de simples calculateurs. Et il y a là tout un symbolisme, toute une construction de tableaux très esthétiquement échafaudés. C'est une sorte de Nomographie, sans figures, qui se greffe curieusement sur le Calcul des Probabilités. A. Buhl (Toulouse).

Actualités scientifiques. — Fascicules gr. in-8° avec figures et planches, se vendant séparément à prix divers. Hermann & Cie, Paris.

450. — J. KARAMATA. *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité* (Théorie des Fonctions. Direction Paul Montel. 48 pages, 1937. Prix: 12 francs). — Curieux fascicule qui s'adjoint à l'ouvrage de M. G. Doetsch analysé ci-dessus. En général les procédés de sommabilité apparaissent comme beaucoup plus compliqués que les procédés de sommation quoiqu'il y ait une première exception pour les séries trigonométriques traitées par le procédé de Cesáro-Fejér. Toutefois juger de la convergence d'une série au travers de ses caractères de sommabilité était un problème d'inversion qui logiquement devait être examiné. Et, comme la sommabilité borélienne peut être appuyée sur l'intégrale de Laplace-Abel, c'est l'inversion de celle-ci qui est étudiée sous de nouveaux aspects. C'est, toujours comme il est indiqué plus haut à propos de l'ouvrage Doetsch, les méthodes tauberiennes qui sont examinées à la suite des méthodes abéliennes.

La bibliographie du sujet est extrêmement étendue. M. Karamata lui-même n'a pas publié moins de vingt Mémoires ou Notes sur ce sujet. Celui-ci est vraiment un chapitre très original à adjoindre à tous ceux qui concernent les équations intégrales.

465. — W. GONTCHAROFF. *Détermination des Fonctions entières par interpolation* (Théorie des Fonctions. Direction Paul Montel. 50 pages, 1937. Prix: 12 francs). — Il semble que ce sujet remonte, au moins, jusqu'à G. Mittag-Leffler qui créa, non sans élégance, des fonctions entières *approchant* des fonctions analytiques quelconques. En tout cas, des disciples du Maître, notamment E. Phragmén et E. Lindelöf, sont ici en première ligne. Le principe élémentaire de l'interpolation polynomiale est conservé. Seulement, il s'agit ici de *suites* de polynômes devant converger vers des fonctions entières. Je m'étonne un peu de ne pas trouver, sur ce point, d'appel plus explicite à la notion de *famille normale* de M. Paul Montel. Le sujet fait encore appel à cette fameuse transformation de Laplace, sans doute à cause de sa maniabilité toute particulière dans les domaines intégraux. Il y a des *points d'interpolation* sur lesquels, à certains égards, on semble raisonner comme sur des zéros de fonctions entières; ces points semblent propres à former des configurations géométriques remarquables. Et il s'agit bien, au fond, de la construction de fonctions entières non plus seulement par *zéros* donnés mais par *valeurs quelconques* données. Riche bibliographie.

472. — Georges BOURION. *L'ultraconvergence dans les Séries de Taylor* (Théorie des Fonctions. Direction Paul Montel. 48 pages, 1937. Prix: 12 francs). — Encore un sujet fort curieux qui se rattache à la sommabilité. Dans un développement taylorien, on prend des polynômes-sections mais, au lieu de les assembler suivant certains schèmes constructifs dépendant d'une fonction sommatrice, on les étudie plus directement. Et il y a alors de certaines suites de ces polynômes-sections qui convergent uniformément autour de points-frontières du cercle de convergence. Après tout, ce n'est pas si extraordinaire. D'une suite de polynômes, on peut extraire des suites partielles à propriétés-limites différentes; il me semble que c'est encore là une idée de *normalité* à la Paul Montel. L'art est, sans doute, dans la distribution lacunaire à adopter. Et comme il y a des séries de Taylor qui sont

naturellement lacunaires, ces dernières s'offriront plus particulièrement à des combinaisons d'ultraconvergence. Mais, de toutes façons, l'intérêt est grand, la question semblant demander une pénétration toute spéciale; elle rappelle certains prolongements *quasi-analytiques* au travers de lignes singulières. D'ailleurs, en plusieurs endroits du fascicule, le contact avec le quasi-analytique est nettement signalé. En somme très belle addition à la théorie des séries de polynômes. Et, comme pour les fascicules précédents, bibliographie riche et suggestive.

473. — P. Lacroute. *Raies d'absorption dans les Spectres stellaires* (Physique atomique et Spectroscopie. Direction Eugène Bloch. 92 pages, 1937. Prix:20 francs). — Travail d'un jeune et brillant astronome de l'Observatoire de Toulouse. On a l'impression de lire un traité, sur les théories électroniques et quantiques, qui aurait été élaboré dans l'immense laboratoire du ciel. Puisqu'ici nous devons nous placer surtout au point de vue mathématique, signalons que l'étude globale d'une atmosphère stellaire peut se traduire par une équation différentielle (plus exactement intégro-différentielle) formée par Milne ou par Eddington. Cette équation est compliquée mais, une fois qu'on l'a formée, on a une méthode de travail en recherchant les hypothèses qui conduisent à des cas d'intégrabilité exacte ou approchée. Naturellement, il reste bien des phénomènes, tels la rotation des étoiles, hors de l'équation en question. M. Eugène Bloch, dans une courte Préface, signale aussi que la complication et la variété des causes capables d'influencer les raies d'absorption des spectres stellaires sont telles qu'il est extrêmement malaisé de démêler le rôle exact de chacune d'elles. L'hydrogène, l'hélium changent étonnamment leurs spectres par effet Stark. Mais M. Lacroute travaille indéniablement à débrouiller un écheveau que de nouvelles observations pourront toujours compliquer à nouveau. Ceci, dit-il en terminant, exigera souvent l'introduction d'idées nouvelles qui amélioreront notre connaissance du monde. 102 citations bibliographiques !

493. — René Lambert. *Structure générale des Nomogrammes et des Systèmes Nomographiques* (Procédés généraux de Calcul. Direction Maurice d'Ocagne. 64 pages, 1937. Prix: 15 francs). — Adjonction remarquable à l'œuvre de M. d'Ocagne qui, remarquons-le en passant, a commencé à prendre une ample place, dans la Science, en même temps que *L'Enseignement mathématique*. C'est, en effet, dans le premier volume de notre Revue (1899) que l'on trouve (p. 368) l'analyse du grand *Traité de Nomographie*. Le fascicule de M. René Lambert est plus modeste et pourrait davantage être comparé à celui publié dans le *Mémorial des Sciences mathématiques* et que nous avons analysé aussi (**24,** 1924-25, p. 338).

Il s'agit surtout, ici, des *systèmes* de nomogrammes, systèmes qui peuvent comprendre des multiplicités de plans et donnent des généralités nouvelles pour le nomogramme unique, en vue de son introduction possible dans un système. La simple analyse combinatoire témoigne de l'extrême variété des systèmes mais l'art nomographique consiste précisément à trouver, en eux, un fil conducteur avantageux. Il y a notamment une ingénieuse théorie de contacts correspondant à des degrés de liberté. D'inévitables tâtonnements prennent figure d'approximations successives. L'impression générale est celle d'une nomographie traduisant des propriétés d'hyperespace et ce sans perdre de vue nombre de problèmes pratiques.

503. — Octave ONICESCU et Georges MIHOC. *La dépendance statistique. Chaînes et familles de chaînes discontinues* (Exposés d'Analyse générale. Direction Maurice Fréchet. 48 pages, 1937. Prix: 15 francs). — Fascicule d'apparence bizarre qui débute au paragraphe 6 et par une notation (A) qui, si je ne la connaissais pas par ailleurs, me semblerait insuffisamment explicite. On ne commence à saisir des généralités qu'au paragraphe 16 avec l'extension de la notion de chaîne.

C'est la notion classique de *dépendance* qui est en jeu. Elle peut se traduire par des relations infinitésimales où figurent les variables et le temps, donc par des équations différentielles. Mais celles-ci peuvent être remplacées par des relations discontinues à suivre dans un cadre fonctionnel. Les états possibles d'un phénomène, à un instant quelconque, constituent une variable *statistique*; il s'agit d'enchaîner ces variables conformément à une règle *déterministe*, préoccupation fort indéterminée pour laquelle les chaînes de Markoff apportent une première hypothèse particulièrement simple. Nous sommes dans les formes fonctionnelles du Calcul des Probabilités. Au delà des chaînes de Markoff, on trouve des généralisations sinon aisées du moins intuitives et l'intérêt général de toutes ces chaînes est l'élargissement des bases des théories probabilitaires. Il faut surtout s'entendre sur les enchaînements susceptibles de recevoir une définition mathématique.

518. — E. NOETHER und J. CAVAILLÈS. *Briefwechsel Cantor-Dedekind* (64 pages, 1937. Prix: 20 francs). — Ce recueil épistolaire est émotionnant au possible. Il s'agit de Georg Cantor, créateur de la Théorie des ensembles. L'homme qui a joué aussi formidablement avec les notions d'infinitude nous fait maintenant l'effet d'un génie extraordinaire. Qui sait les persécutions qu'il dut endurer. Weierstrass était défiant; Kronecker, hostile jusqu'à la méchanceté, traitait Cantor de « corrupteur de la jeunesse ». C'est une sorte de querelle préeinsteinienne; on dénigre. Mais ceci n'est-il pas de tous les temps. Socrate aussi corrompait la jeunesse et dut boire la ciguë.

Cantor, s'il ne fut pas condamné à mort, vit sa santé s'altérer. Il dut se réfugier dans une clinique. On reste confondu de l'incompréhension et de la haine qui peuvent s'attacher à des questions mathématiques, à des idées nouvelles sur la structure du continu et de l'espace. Honneur, par contre, à ceux qui ont soutenu et défendu Cantor, à Mittag-Leffler, à Poincaré, à Bernstein, à Emile Borel. Quant à Dedekind, son rôle fut véritablement grand. Il vit certaines faiblesses des premiers raisonnements de Cantor et le moyen de les corriger. L'ensemblisme et la moralité marchaient ainsi de pair. Et, dans ces lettres, les ensembles semblent reprendre la vie de leur première jeunesse.

L'intérêt de la question a donné naissance à un article étendu intitulé *Opinions scientifiques* et publié, à Toulouse, dans le journal *La Dépêche* (29 mars 1938).

520. — E. J. GUMBEL. *La durée extrême de la vie humaine* (Statistique mathématique. Direction Georges Darmois. 66 pages, 1937. Prix: 18 francs). — Problème-limite où se mêlent la Statistique et le Calcul des Probabilités. Lorsque l'on construit une Table de mortalité, il arrive, vers la fin, que la loi des grands nombres n'en semble plus ressortir. Les considérations globales et continues tendent à perdre ces caractères. Mais vers quel âge observe-t-on de tels changements ? Naturellement, la réponse dépend des pays et des

milieux mais elle ne va pas sans modalités intéressantes. Ainsi, par exemple, le nombre des centenaires peut varier mais sans variation de la longévité de ces personnages. Ou inversement. Plus généralement il y a là deux valeurs, nombre et âge, qui peuvent être liés par une relation elle-même probabilitaire mais précisément fort digne d'étude. L'une des conclusions est que l'on sait mal quelles sont les causes qui agissent sur l'extrême longévité. L'hygiène peut sembler favorable mais les Mathusalem bibliques ne semblaient pas spécialement s'en soucier. Le sujet est plus riche en formules qu'on ne pourrait croire. Les tables et les graphiques abondent. La Suisse et la Suède ont été particulièrement mises à contribution.

A. Buhl (Toulouse).

Pierre Dive. — **Le Principe de Relativité selon Poincaré et la Mécanique invariante de Le Roux.** — Un fascicule gr. in-8° de 70 pages. Prix: 17 francs. Dunod, Paris, 1937.

Ce fascicule est un extrait, tiré à part, des *Archives des Sciences Physiques et Naturelles;* il a été imprimé, comme *L'Enseignement mathématique*, chez Albert Kundig, à Genève. Le titre indique qu'il s'agit d'une œuvre sympathisant avec les *Principes et Méthodes de la Mécanique invariante* dus à M. Le Roux et déjà analysés ici (**34,** 1935, p. 133). D'ailleurs les idées de M. Le Roux semblent également accueillies avec une certaine faveur par M. Bouligand qui, dans le *Précis de Mécanique* signalé plus haut, les a mentionnées brièvement. Pour moi, il me semble voir, dans ces tentatives, une modernisation de la Mécanique faite non plus avec le secours des Espaces de Riemann mais avec celui de la Théorie des groupes de Sophus Lie. Mais qui ne sait que ces deux disciplines sont extrêmement voisines ? Que, par l'emploi de la multiplication et de la dérivation extérieures, les variétés riemanniennes et les espaces de groupes sont conceptions complètement analogues. En tout cas, ceci nous a été magnifiquement démontré par M. Elie Cartan. Nous n'aurions pas été détournés d'analogies aussi immédiates si Henri Poincaré n'était pas mort prématurément.

Et tout cela est si vrai que M. Pierre Dive conclut tout de même à la possibilité d'utiliser physiquement les espaces de Riemann *incurvés*, voire les espaces *tordus* et, plus simplement, les transformations de la Géometrie de Cayley. C'est toujours le procédé einsteinien avec quelques nuances, de même que « l'idée féconde de M. Varcollier qui consiste à associer à tout milieu ondulant une équation de la forme $g_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0$ » n'est pas essentiellement distincte d'un appel à la loi de gravitation d'Einstein. Je ne vois, en tout ceci, que des variantes heureuses comme susceptibles d'appeler de nouvelles précisions.

On peut dire, sans me gêner, que la courbure de l'espace de Riemann est rejetée. Personne ne s'est jamais représenté cette notion comme celle d'une courbure géométrique tangible. Du moins, en général. La courbure de l'espace-temps n'est qu'interprétation de son hétérogénéité.

Par exemple, ce qui me semble difficile à admettre c'est l'idée d'un repère *solide* physique universel. Nous ne connaissons le corps solide que par l'emprunt que nous en faisons à la croûte terrestre. Et cette croûte me paraît jouer un rôle infime dans l'Univers. Vouloir transporter partout ses propriétés ou seulement une partie de celles-ci, c'est faire une extrapolation qui comporte un point d'interrogation ?

Des réponses sont concevables. Peut-être les groupes de déplacements euclidiens ont-ils une existence logique propre, en tout cas non complètement inféodée à la notion de solidité. On peut aussi, dans le solide, trouver les germes d'une théorie tensorielle; c'est ce que M. Léon Brillouin a magnifiquement montré dans un ouvrage analysé ci-dessus. Tout ce qu'on tire des équations d'électromagnétisme, y compris leurs compléments gravifiques, proviendrait alors des équations de l'élasticité. Il y a là du possible.

Précisément pour ces remarques, je souhaite qu'on lise M. Pierre Dive. Son fascicule, riche en citations, ne peut manquer de susciter de fécondes comparaisons. A. Buhl (Toulouse).

B. Kagan. — **Mémoires du Séminaire pour l'Analyse vectorielle et tensorielle et pour ses Applications à la Géométrie, à la Mécanique et à la Physique.** Livraison IV. — Un volume gr. in-8° cartonné de 404 pages. Prix: 8 roubles 50. Rédaction centrale de la Littérature technique générale. Moscou, Leningrad, 1937.

Les livraisons précédentes de ces *Mémoires* ont déjà été signalées ici (**32,** 1933, p. 276 et **34,** 1935, p. 293). Les travaux réunis sous la direction du Professeur B. Kagan continuent à représenter ce qu'il y a de plus fin et de plus important en matière d'Analyse tensorielle.

La livraison IV n'aura pas besoin, aujourd'hui, d'une description spéciale car elle contient les communications faites à la « Première Conférence internationale pour la Géométrie différentielle tensorielle et ses Applications », communications dont la liste a déjà été publiée dans *L'Enseignement mathématique* (**33,** 1934, p. 99).

Toutefois, entre une liste de titres et les développements que ceux-ci comportent, il y a, à coup sûr, une très grande différence. Quel immense intérêt dans ces développements !

Le premier d'entre eux, fait par M. Bortolotti, *A la Mémoire de G. Ricci-Curbastro*, est un éloquent historique du Calcul différentiel absolu. Le parallélisme de Levi-Civita, c'est le Calcul de Ricci traduit en Géométrie. Suivent Einstein, Weyl, Cartan et tant d'autres.

Le professeur Kagan lui-même a dit *Die Ziele und Aufgaben der Konferenz.*

Des rapprochements ont été faits, par M. Elie Cartan, entre la Géométrie textile de M. Blaschke et les Espaces de Finsler.

M. G. Rumer, de Moscou, a donné une interprétation de la matière en Relativité générale.

Une grande conférence de M. Elie Cartan concernait *Les Espaces à connexion projective.*

M. A. Norden, de Moscou, consacre 48 pages aux déplacements parallèles généralisés dans l'espace projectif. Suivent des considérations de courbure se particularisant simplement dans l'espace euclidien.

M. Kagan revient encore sur la dualité métrique de M. Elie Cartan. Intégrales multiples ou Géométrie intégrale de Blaschke sont en jeu.

M. Bortolotti, après avoir parlé de la genèse du Calcul différentiel absolu, en examine les extensions. M. Burgatti tente quelque chose d'analogue.

L'espace (cette fois simplement typographique) nous manque pour faire de plus amples citations. Concluons, une fois de plus, à toute la gloire qui s'attache déjà au Séminaire tensoriel de Moscou.

A. Buhl (Toulouse).

Nicolas KRYLOFF et Nicolas BOGOLIUBOFF. — **Recueil de Travaux sur la Mécanique non linéaire.** Académie des Sciences de la R.S.S. d'Ukraine. Institut de Mécanique des Constructions. Annales de la Chaire de Physique mathématique, t. III. — Un volume gr. in-8° de 216 pages. Prix: 6 roubles 50. Publié par l'Académie des Sciences de la R.S.S. d'Ukraine, Kiev, 1937.

Pour l'analyse des tomes I et II de ce Recueil, on se reportera à notre précédent volume (1937, p. 280). Au même endroit, on trouvera des indications sur les travaux antérieurs des mêmes et sympathiques auteurs. Commençons par donner le sommaire de leurs publications en ce présent tome III.

1. Travaux de la Chaire de Physique mathématique en Mécanique non linéaire.
2. Théorie générale de la mesure en mécanique non linéaire.
3. Effet de la variation statistique des paramètres sur le mouvement des systèmes dynamiques conservatifs pendant des périodes de temps suffisamment longues.
4. Effet de la variation statistique des paramètres sur les propriétés ergodiques des systèmes non conservatifs.
5. Sur les itérations répétées avec des paramètres variables.
6. Index bibliographique des travaux des auteurs sur la Mécanique non linéaire.

En 1, il est très justement dit que la Mécanique non linéaire constitue maintenant tout une branche de la Science, comme la Mécanique céleste à équations canoniques, comme la Gravifique. La Mécanique nouvelle semble d'ailleurs avoir une plasticité de plus en plus grande; elle peut devenir quantique et statistique. En 2, elle devient intégrale à la manière de Lebesgue; on sait combien est profonde, en Physique, la seule idée d'avoir recours aux espaces mesurables.

En 3, la Mécanique est probabilitaire avec probabilités pouvant tendre vers l'unité. Dans ce cas, nous pouvons retrouver des considérations dynamiques ordinaires mais aussi une curieuse dynamique du « presque partout ». En 4, mêmes considérations mais dans les domaines non conservatifs.

En 5, itérations comparables, si l'on veut, aux approximations successives par itérations canoniques mais d'une autre nature. Encore la nécessité de définir la mesure ou la géométrie de systèmes qui font leur temps et leur espace.

En 6 l'index bibliographique comprend 34 publications s'échelonnant à partir de 1932.

Le présent tome est rédigé, comme les précédents, dans le dialecte ukrainien mais avec des résumés français de plus en plus développés et explicites. Ceci continue à nous donner bon espoir quant à la publication d'un grand ouvrage, également français, que l'avenir nous apportera certainement, au sujet de la Mécanique non linéaire.

A. BUHL (Toulouse).

Georg HAMEL. — **Integralgleichungen.** Einführung in Lehre und Gebrauch. — Un volume gr. in-8° de VIII-166 pages et 19 figures. Prix: broché RM. 9,60; relié RM. 12. Julius Springer, Berlin, 1937.

Belles Leçons faites à l'Université technique de Berlin, à un point de vue

pratique pour lequel « une belle application est plus importante qu'un long théorème d'existence ». Ces mots, entre guillements, sont extraits de la Préface du livre. Celui-ci est d'ailleurs dédié, par l'auteur, à sa fille Ingeburg, à l'occasion de ses noces. Et cette fille connaît assez bien le sujet pour avoir aidé son père, au moins quant à la correction des épreuves. Les équations intégrales se sont donc introduites non seulement dans le domaine technique mais encore dans l'intimité familiale. Et, de ce fait, elles sont devenues particulièrement avenantes.

La théorie est présentée comme une extension de celle des séries de Fourier. Elle est rattachée aux premiers essais d'Abel, Du Bois-Reymond, C. Neumann, H. Poincaré. Elle prend sa physionomie actuelle avec Fredholm, D. Hilbert, Erhard Schmidt. Nous avons eu ici l'occasion de signaler les ouvrages de Courant-Hilbert et Frank-Mises. Les ouvrages français de Goursat, Heywood-Fréchet, Lalesco, Volterra-Pérès ne sont pas oubliés. Mais il ne s'agit pas de résumer tout ceci. L'auteur en présente la substance en commençant par le problème de la corde vibrante, ce qui est la manière de Kneser, manière notablement simplifiée. Le premier type d'équation ainsi obtenu s'accomode aisément de l'adjonction d'une fonction perturbatrice. Le lien avec les équations différentielles du premier et du second ordre est également aisé à mettre en évidence, d'où un premier aperçu sur la méthode de Volterra et les procédés d'approximations successives.

Viennent ensuite les séries de Neumann avec le noyau résolvant puis, très rapidement, le laplacien et quelques équations fondamentales de la Physique. Les procédés d'orthogonalisation s'associent aisément aux noyaux symétriques. Puis vient la question, à la Fourier, des $f(x)$ représentables par séries de fonctions propres.

La théorie de Fredholm, première en date, n'était pas la plus simple. Elle suppose une théorie de l'indépendance linéaire et des maniements de déterminants dépendant d'un lemme fameux dû à M. Jacques Hadamard. Avec les noyaux dissymétriques viennent les procédés de Enskog et Schmidt.

A partir d'ici, Hilbert intervient beaucoup, ce qui est fort naturel. On lui emprunte l'équation intégrale « polaire » puis une première méthode à développements algébriques et enfin le fameux espace hilbertien où s'ébat maintenant la Mécanique ondulatoire. Les applications ou plutôt les interprétations physiques accompagnent toujours l'exposé. Ceci notamment avec l'équation de Mathieu et, plus loin, avec une certaine discussion concernant une aile portante. L'aérodynamique même illustre un sujet aussi élégant que riche. Notons qu'avec M. Georg Hamel, la brièveté de l'exposé ne semble pas avoir diminué la richesse du thème.

A. Buhl (Toulouse).

O. Caratheodory. — **Geometrische Optik** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, herausgegeben von der Schriftleitung des « Zentralblatt für Mathematik ». Vierter Band. Heft 5). — Un fascicule gr. in-8° de IV-106 pages et 11 figures. Prix: RM. 9.90 Julius Springer, 1937.

Très joli fascicule tout naturellement rattaché au Calcul des variations et pour lequel M. Carathéodory était un auteur tout indiqué, tant la prédilection marquée par lui pour le domaine variationnel est chose connue.

L'optique géométrique peut être considérée sous bien des aspects. C'est la théorie, d'abord purement géométrique, des ensembles de droites avec des géomètres français tels Malus, Dupin, Quételet, Gergonne. Ensuite, il n'est pas exagéré de dire que les méthodes variationnelles commencent avec Descartes et Fermat, d'une part, Huyghens, d'autre part. Euler, Lagrange, Cauchy ont perçu le caractère fondamental du sujet. Hamilton, avec son fameux Principe et ses équations canoniques a fait de même en allant, pour ainsi dire, jusqu'aux systèmes différentiels les plus simples qui se sont trouvé être ces systèmes canoniques. Que ceux-ci puissent convenir ensuite à la dynamique de champs matériels, soit; la lumière aura précédé au moins la matière en mouvement. Comme considérations récentes, nous avons celles de Poincaré, Cartan, De Donder, Carathéodory qui nous montrent une optique faisant grand usage d'invariants intégraux. On est même étonné, si l'on se place au point de vue où M. Carathéodory a si parfaitement raison de se placer, de constater combien l'appareil dynamique peut prendre très simplement une physionomie optique, par exemple quant à l'usage des crochets de Poisson et Lagrange. Encore une fois, il n'y a là aucun rapprochement plus ou moins contraint; il n'y a qu'une double simplicité, celle des systèmes canoniques et celle de la lumière.

Dans l'espace optique, les transformations isogonales jouent un rôle particulièrement intéressant. Elles reviennent à la géométrie des inversions, susceptible d'être magnifiquement traitée en coordonnées pentasphériques, et ceci à propos de la considération, due à Maxwell, d'un œil de poisson.

Comme il semble que ce soit surtout l'élégance et l'art qui aient été recherchés ici, le cortège d'approximations de certaines théories instrumentales a été quelque peu délaissé. Dans de tels cas l'auteur indique les raccords à faire avec les traités écrits en vue d'un but plus pratique ou plus expérimental. Il n'a traité, pour ainsi dire, que jeux de lumière, mais combien brillants ! A. Buhl (Toulouse).

Eberhard Hopf. — **Ergodentheorie** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, herausgegeben von der Schriftleitung das « Zentralblatt für Mathematik ». Fünfter Band. Heft 2). — Un fascicule gr. in-8° de vi-84 pages et 4 figures. Prix: RM. 9.80. Julius Springer, Berlin, 1937.

Ce cinquième volume d'une Collection déjà bien connue a débuté par les *Subharmonie Functions* de Tibor Rado. Voir notre précédent volume, p. 414. Nous voici dans les Théories ergodiques, c'est-à-dire dans les théories se rapportant aux propriétés statistiques et probabilitaires concernant des *ensembles* de trajectoires. Il faut souligner le mot *ensemble* qui doit être pris au sens cantorien. Il faut, de même, commencer par des considérations ensemblistes, par les lemmes de Borel et Lebesgue, par les notions de mesure et d'intégration en lesquelles on peut retrouver « presque partout » l'ancien classicisme mais « presque » seulement. Sur des ensembles de mesure nulle apparaissent les éléments modernes qui échappaient autrefois, qui se rient des équations différentielles et qu'on peut cependant, heureusement et élégamment, soumettre à l'Analyse au moyen de théories intégrales convenables. La mécanique, la microphysique sont spécialement intéressées mais nous sommes jusqu'ici dans un domaine qui semble plus particulièrement inféodé à l'esprit mathématique. D'ailleurs, les assemblages dont il s'agit ne se rapportent que très occasionellement à l'espace ordinaire.

Ils sont, plus généralement, dans les espaces en phase parfois imaginaires. C'est ici que l'on saisit, sur le vif, ces phénomènes virtuels, à modalités qui, partiellement au moins, ne relèvent point de l'expérience mais qui semblent indispensables pour asseoir, de façon cohérente, des réalités expérimentales. Ainsi une Géométrie réelle et cohérente ne peut se passer de droites isotropes, de points cycliques et de génératrices imaginaires pour la sphère.

L'espace est généralement celui des fonctions d'ensemble. C'est aussi, éventuellement, celui de Hilbert. Les spectres fonctionnels sont à percevoir en des intégrales définies. Il faut savoir lire Birkhoff, Carathéodory, Carleman, Fréchet. Il s'agit finalement des lignes géodésiques sur les surfaces à courbure négative constante. Ce n'est évidemment qu'une particularisation d'un point de vue ergodique beaucoup plus général. Il y a également des contacts avec les considérations de Mécanique non linéaire de MM. Nicolas Kryloff et Nicolas Bogoliuboff, contacts qui seraient à développer au delà de ce que donne le fascicule. Mais l'exposé est habile; il n'est même jamais inutilement compliqué. C'est une belle œuvre de plus qui nous apprend à reconnaître, dans le monde physique, toutes les subtilités dues à l'esprit mathématique. A. Buhl (Toulouse).

H. Ertel. — **Methoden und Probleme der Dynamischen Meteorologie** (Ergebnisse des Mathematik und ihrer Grenzgebiete herausgegeben von der Schriftleitung des « Zentralblatt für Mathematik ». Fünfter Band. Heft 3). — Un fascicule gr. in-8° de IV-122 pages et 14 figures. Prix: RM. 14. Julius Springer, Berlin, 1938.

Encore un ouvrage assez inattendu bien que la bibliographie du sujet soit considérable. Curieux frontispice emprunté à une lettre de Descartes au Père Mersenne: « A mon avis tout se passe, dans la Nature, de manière mathématique ». Voilà une opinion bien connue, d'accord avec une foule de théories mais qui ne semblait pas devoir se vérifier dans le domaine plutôt incertain de la météorologie. D'autre part, dès la première page, nous trouvons l'indication d'une publication de V. Bjerknes concernant la météorologie considérée comme science exacte. Et les citations de ce genre abondent. Les équations de l'hydrodynamique selon Lagrange et Euler sont associées à des considérations thermiques et plus généralement énergétiques, l'énergie intervenant par rayonnement, par convection et même par des formes relevant des théories quantiques. Plus loin nous trouvons des ds^2 de la forme $\mu_{ik}\, dx^i\, dx^k$ et le symbolisme de Christoffel; l'atmosphère est éventuellement un espace de Riemann ! Il y a un théorème de circulation de Bjerknes et un principe variationnel qui tiennent forcément compte de la rotation de la Terre. A partir de cette rotation, on peut exprimer des états statiques et des critériums de stabilité. Les différences de température vont entraîner des vents, des condensations, des mouvements de masses nuageuses. En tout cela on pourra distinguer des changements d'état quasi-statiques. Il y a aussi des vents stationnaires et des discontinuités, également stationnaires, qui sont des ondes de nature différentielle telles celles si magistralement étudiées par M. Jacques Hadamard. C'est avec grand plaisir que l'on trouve enfin ce nom français au milieu d'une foule d'autres étrangers et généralement inconnus des mathématiciens. Cela prouve que la météorologie théorique a progressé à l'écart, grâce à des adeptes très spécialisés, et qu'elle se révèle tout à coup avec les prétentions d'une science

à structure mathématique. Sans doute, elle n'en est pas à la précision astronomique mais c'est là l'opposition habituelle du mouvement de milieu continu et du mouvement ponctuel. Ce qui peut illustrer le premier, en météorologie, est ici analysé avec grand talent. Les analogies avec les marées, avec les masses entièrement fluides en rotation, sont également nombreuses. De tels rapprochements vont, sans doute, susciter encore de nouvelles et profondes recherches. A. Buhl (Toulouse).

N. Abramesco. — **Lectiuni de Geometrie analitica** urmate de Introducere elementara in studiul analitic al Geometriilor neeuclidiene si Notiuni elementare de Geometria vectoriala. Préface de G. Tzitzéica. Deuxième édition. — Un volume gr. in-8° de VIII-656 pages. Prix: 520 Lei. Editura Universitatii din Cluj, 1937.

Ce beau volume en comprend trois. Le premier, de 496 pages et 331 figures, concerne la Géométrie analytique classique des droites, des coniques, des quadriques, des lieux, des courbes quelconques et de leurs points singuliers. Le texte proprement dit est habilement réduit à l'essentiel mais il est coupé par des passages en caractères plus petits et par de très nombreux exercices qui mènent l'étudiant dans tous les domaines où il y a quelque chose à construire, à transformer ou à analyser avec le secours d'une intuition tantôt géométrique, tantôt analytique. Un tel Cours, fait dans une Faculté des Sciences, à Cluj, est bien digne d'une Université. En France, nous pourrions, théoriquement, avoir l'équivalent dans nos Cours de Mathématiques générales à cela près que l'organisation de ces derniers Cours ne laisserait probablement pas, au professeur, le loisir de se montrer aussi complet que M. Abramesco.

Le second volume (pages 497-575 avec 15 figures) est consacré à la Géométrie non euclidienne. Il débute par un historique et s'inspire manifestement de Gaston Darboux, ce qui n'est pas pour nous déplaire. Il part de Klein et de Mansion, passe par Bonola, Barbarin et Buhl, aboutit à Weyl, Cartan, Bouligand, Levi-Civita. Si les Théories einsteiniennes n'ont pas été vraiment développées, du moins, elles sont là, toutes proches, comme un idéal qui peut désormais intervenir à volonté. La Géométrie de Cayley est vraisemblablement, dans un ordre d'idées relativement élémentaire, la forme la plus élégante de la Géométrie non euclidienne; elle a d'ailleurs l'avantage d'être d'essence projective. M. Abramesco n'a pas manqué de la présenter sous forme particulièrement séduisante.

Le troisième volume (pages 576-656 avec 43 figures) a trait à la Géométrie vectorielle. Il permet de revenir sur la Géométrie analytique du début et de traiter aisément des courbes gauches et des surfaces. C'est là que l'on peut s'initier au maniement des produits dont les facteurs ne sont pas, en général, commutatifs. Et ceci est une autre porte d'entrée dans la science tensorielle et matricielle d'aujourd'hui.

Quand on pense aux énormes difficultés que peut rencontrer un professeur français désirant introduire, en France, les théories nouvelles dans son enseignement, on salue avec joie, et peut-être aussi avec une pointe d'envie, les modèles, si suggestifs, qui nous viennent de Roumanie.

A. Buhl (Toulouse).

Trajan LALESCO. — **La Géométrie du Triangle.** Géométrie d'Euler. Géométrie récente. Théories générales. Métrique. Avec une Lettre de M. Emile Picard et une Préface de M. Georges Tzitzéica. Deuxième édition. — Un volume in-8° de VIII-120 pages et de nombreuses figures. Prix: 14 francs ou 98 lei. Vuibert, Paris, 1937.

Encore un remarquable ouvrage de Géométrie dû à un savant roumain d'ailleurs prématurément disparu. Trajan Lalesco s'est d'abord fait connaître par des publications concernant les équations intégrales. Je ne sais s'il a cherché à établir lui-même un lien entre ces équations et la Géométrie du triangle mais la chose ne me semble pas impossible. Comme j'ai eu l'occasion de le répéter plus haut, à propos de l'ouvrage Volterra-Hostinsky, l'analyse des substitutions linéaires ou des matrices peut finalement prendre une forme intégrale et les transformations linéaires primitives ne sont qu'homographies capables de jouer abondamment dans le domaine triangulaire. Voies peut-être très différentes mais issues d'un même carrefour. L'auteur a su les parcourir avec un égal bonheur.

L'abondance des coordonnées, associées au triangle (angulaires, normales, barycentriques,...) traduit, au fond, des isomorphies groupales que les précurseurs ne mettaient pas en évidence mais qui maintenant illustrent, de la façon la plus esthétique, un sujet qui ne demande qu'a être inséré dans la science élevée. C'est du moins l'impression que donne l'exposé. Très projectif, celui-ci ne manque pas de devenir métrique c'est-à-dire trigonométrique. Que d'exercices fastidieux il pourrait rendre intéressants et charmants. A. BUHL (Toulouse).

Publications roumaines. Les deux ouvrages précédents suffiraient déjà à attirer plus qu'honorablement l'attention sur la science mathématique roumaine. Celle-ci est cependant beaucoup plus développée encore.

Le livre de Trajan Lalesco forme un Cahier I extrait des *Annales roumaines de Mathématiques* publiées à Bucarest par M. Rodolphe Nicolas Raclis. D'autres cahiers suivent notamment un Cahier II, *Sur les Couples transformables*, dû à M. Alexandre Pantazi et un Cahier III, sur *La Dérivée aréolaire* dû à M. Nicolas Théodoresco. En II, théorie des congruences analysées par les méthodes pfaffiennes; en III, analyse, surtout inaugurée par M. Pompeiu, des $f(x + iy) = P + iQ$ quand le vecteur (P, Q) est simplement fonction du vecteur (x, y) sans monogénéité à la Cauchy. Il y a là autre chose que des Mémoires plus ou moins quelconques publiés par une Revue. Il s'agit de véritables Monographies analogues à celles constituant le *Mémorial des Sciences mathématiques*.

En outre rappelons que l'Institut mathématique roumain (Aleea Vulpache 21, Bucarest 3) publie *Numerus*, journal de Mathématiques élémentaires rédigé en roumain et une *Revista Universitara Matematica*, roumaine et française pour les Candidats à la Licence et les Elèves des Grandes Ecoles.

La Société roumaine des Sciences publie un *Bulletin mathématique* qui, en 1937, en était au tome 39. Nous aurons à compléter ces aperçus par trop réduits. A. BUHL (Toulouse).

Louis BACHELIER. — **La Spéculation et le Calcul des Probabilités.** — Un fascicule de VII-51 pages. Prix: 20 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1938.

Ce nouveau fascicule de M. Bachelier me semble un peu faire bande

à part. Que n'est-il englobé dans quelque *Mémorial* ou dans quelque Collection de Monographies probabilitaires ? Son autorité en serait accrue.

Il est bien certain que la spéculation est une manière de jeu qui relève du Calcul des Probabilités et qu'elle a des conséquences parfois réjouissantes et parfois cuisantes qui obligent aux comparaisons et aux vérifications. Le spéculateur est forcément probabiliste, souvent par intuition, par flair, choses qui, sous certaines réserves, doivent pouvoir se mettre en formules. Mais y a-t-il là une manière particulièrement simple d'aboutir à des formules ? C'est ce que l'auteur semble croire.

Chemin faisant, il aboutit aussi à certains principes qui étonnent, tels, par exemple, que: *L'espérance mathématique de toute spéculation est nulle.* Mais ceci est d'accord avec les postulats adoptés.

Il y aurait, de même, certaines probabilités de réussite qui seraient *fixes* quant à certaines manœuvres et ceci indépendamment du terrain financier sur lequel on opérerait. Il me paraît que tout ceci mérite d'être étudié mais peut-être avec plus d'esprit critique que je n'ai le loisir d'en manifester maintenant.

Je rappelle, avec empressement, que M. Bachelier a publié, l'an dernier, un autre fascicule sur « Les Lois des grands nombres du Calcul des Probabilités » dont j'ai rendu compte ici (**36,** 1937, p. 278) en insistant déjà sur la tendance manifeste de l'auteur à s'éloigner des sentiers battus. Il est presque superflu de rappeler ses exposés de vulgarisation tels *Le Jeu, la Chance et le Hasard* publiés, cette fois, avec l'appui de la *Bibliothèque de Philosophie scientifique.* A. Buhl (Toulouse).

R. Estève et H. Mitault. — **Trigonométrie et Compléments d'Algèbre** à l'usage des Classes de Seconde et Première de l'Enseignement secondaire (Circulaire ministérielle du 18 novembre 1936). — Un fascicule in-8° de IV-56 pages et 14 figures. Prix: 12 francs. Gauthier-Villars. Paris, 1937.

Ce fascicule semble se rattacher à quatre volumes (dont un concernait déjà des *Compléments*) analysés ici (**32,** 1933, p. 117). Il a été engendré par une nouvelle circulaire ministérielle. La Trigonométrie va jusqu'aux formules d'addition et l'Algèbre manie et remanie des équations du second degré, le tout avec 152 exercices à l'appui. Il y a là des nécessités élémentaires sur lesquelles nous ne pouvons nous étendre. Bornons-nous à rappeler l'effort fait par les auteurs dans le sens d'un enseignement clair et modernisé. Ils sont appelés, dans leur domaine, à jouer un rôle directeur. Si cela n'est déjà fait. A. Buhl (Toulouse).

Victorin Charles et Ernest Martin. — **Exercices et Problèmes résolus en Chimie,** à l'usage des Elèves des Enseignements du second degré, de l'Enseignement technique et des Candidats aux Grandes Ecoles. — Un volume in-8° de VII-229 pages. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars. Paris, 1938.

Il est assez étonnant que cet ouvrage ait été adressé, pour compte rendu, à notre Revue. En le feuilletant, sans compétence véritable, j'ai cependant été frappé par l'extraordinaire richesse des formules de réaction, formules entre lesquelles est habilement jeté le fil conducteur des analogies. Chimie générale et Chimie physique défilent sous l'égide de Lavoisier,

Proust, Avogadro, Gay-Lussac, Van't Hoff, Mitscherlich, Blagden et Raoult, Dulong et Petit, Neumann, Wœstyne, Delaroche et Bérard, Berthollet, Faraday et Kohlrausch, Thomson, Ohm, Kirchhoff, Clapeyron, Trouton-Nernst, Romé de l'Isle, Willard Gibbs, Guldberg et Waage, Le Châtelier, Arrhénius. Que d'illustres légistes. Il y a une arithmétique chimique qui se réduit à une véritable débauche de règles de trois. Mais il y a aussi une géométrie de la formule chimique et de certains sucres qu'on ne transforme pas sans un semblant d'équation différentielle. Les auteurs, qui enseignent à l'Ecole nationale d'Arts et Métiers d'Aix-en-Provence, imposeront certainement leurs procédés de travail à beaucoup d'autres établissements. A. Buhl (Toulouse).

A. Speiser. — **Ein Parmenideskommentar,** Studien zur platonischen Dialektik. — Un vol. in-8° de 64 pages; K. F. Köhler, Leipzig, 1937.

Si le surnom de « divin » fut appliqué avec justesse à Platon, c'est en partie, sans doute, parce que plus on s'applique à étudier cet auteur et son œuvre, plus ils vous apparaissent insondables et mystérieux. Or, entre tous, le « Dialogue sur Parménide » a de tous temps été regardé comme la plus indéchiffrable des énigmes. Que l'on compare ce Dialogue avec les autres ouvrages de Platon, que l'on tâche de faire concorder entre elles les différentes parties du « Parménide », et l'on verra aussitôt surgir des questions et des contradictions sans nombre... Depuis plus de deux mille ans, des philosophes et des philologues s'acharnent à faire briller quelque lumière dans cette obscurité, en sorte que la littérature relative au « Parménide » ne se dénombre plus depuis longtemps. Déjà, le néoplatonicien Proclus, dans son *Commentaire sur Parménide*, divisait ses prédécesseurs en deux groupes principaux. Le premier comptait les commentateurs qui ne voient, dans ce Dialogue, que le feu d'artifice d'un esprit fantaisiste. Le deuxième groupe soutenait l'opinion que Platon, dans son « Parménide », a déposé le fruit de son initiation la plus profonde. Tandis que les uns passent, sur ce Dialogue, le verdict d'insignifiance, les autres — quand ils sont des philosophes — échappent rarement au danger d'y retrouver leur propre système philosophique... Les choses en sont là, encore de nos jours. (Un troisième point de vue, selon lequel le « Parménide » serait une œuvre apocryphe, peut être considéré aujourd'hui comme définitivement écarté.)

Ces derniers temps, ont paru deux traités sur le « Parménide », dus à la plume de MM. Max Wundt et Andreas Speiser et qui révèlent des tendances entièrement nouvelles. Nous ne nous occuperons ici que de l'ouvrage de M. Speiser parce qu'il nous semble offrir aux lecteurs de cette revue trois avantages essentiels:

1° L'auteur en est un mathématicien. Or, seul un mathématicien peut pénétrer à fond la dialectique platonicienne, être à même de comprendre et de faire comprendre que des thèses contradictoires ne s'excluent pas forcément mais que leurs divergences peuvent être, en quelque sorte, comme « abolies » par un geste créateur de l'esprit. Que l'on songe à l'élargissement qu'a subi l'idée du « nombre » ou à l'édification de géométries différentes — pour ne citer que les exemples les plus connus. Toute une série de problèmes mathématiques qui jouent, dans Platon, un rôle plus important que l'on ne l'admet communément, sont l'objet d'une étude approfondie de la part du professeur Speiser; et ceci aussi contribue à nous rendre son *Commentaire* très précieux.

2° Ses arguments sont clairs et fort bien présentés. Il laisse de côté toute discussion portant sur les narrations secondaires qui encadrent le Dialogue et sur leur relation possible avec la partie centrale de l'ouvrage. Il se borne à commenter le « monologue dialogué... en deux grandes scènes: affirmation de l'UN et conséquences de cette affirmation, soit pour l'UN, soit pour tout ce qui n'est point l'UN; négation de l'UN et conséquences de cette négation, soit pour l'UN lui-même, soit pour tout ce qui est autre que l'UN » (Diès). Speiser divise la partie centrale en 9 « positions » — d'autres commentateurs admettaient 4, 6, 8, 9 ou 10 hypothèses — impliquant un total de 78 conséquences. L'auteur examine aussi la construction de cette œuvre d'art de la dialectique, donnant ainsi au lecteur le moyen de se faire et de garder une vue d'ensemble grâce à laquelle son intérêt ne faiblit jamais.

3° Le *Commentaire* est bref. Toute controverse avec d'autres commentateurs est, par principe, évitée. Speiser met au premier plan le texte platonicien, envisagé comme un système d'axiomes duquel on peut déduire des conclusions, mais où l'on n'introduit pas de secrètes allusions, auquel on ne fait rien dire qui ne soit déjà contenu dans les hypothèses primordiales.

Par analogie avec « L'Art de la Fugue », de Bach, l'auteur baptise le « Parménide » de Platon un « Art de la Dialectique », n'entendant pas, toutefois, sous dialectique, la manie, propre aux sophistes, de faire triompher leur thèse par les divers subterfuges d'une éloquence acrobatique, mais bien cette science élevée qui tend à réconcilier les extrêmes et à combler les fossés, par la force seule de la pensée sereine et purement abstraite.

L'argumentation de Speiser est, elle-même, pénétrée de cet esprit dialectique, et ceci ne surprendra pas ceux auxquels Platon a enseigné que le fondement de toute dialectique est la mathématique. D'ailleurs, ce courageux *Commentaire* d'un auteur indépendant de toute coterie n'élève pas la prétention de posséder l'absolue vérité sur l'idéologie de Platon. Mais, de même que nous sommes captivés par « L'Art de la Fugue », tout en sachant que l'arrangement que nous entendons — celui de Wolfgang Graeser, à qui Speiser a dédié son *Commentaire* — ne correspond peut-être pas exactement aux intentions de Bach, ainsi l'étude de l'ouvrage dont je viens de parler — dussent même philosophes et philologues aboutir, un jour, à d'autres conclusions — n'en sera pas moins pour nous d'un très riche profit.

W. Honegger (Winterthour).

Fr. Ringleb. — **Mathematische Methoden der Biologie** insbesondere der Vererbungslehre und der Rassenforschung. — Un vol. in-8° de 181 pages; relié, RM. 8,80 (étranger 6,60); B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1937.

Les recherches sur l'hérédité et les problèmes qui s'y rattachent ont ouvert des voies nouvelles à la pénétration des mathématiques dans les sciences biologiques. Qu'il nous suffise, à titre d'exemple, de rappeler le beau mémoire de M. V. Volterra inséré en tête du précédent fascicule.

Aux publications récentes dans ce domaine vient s'ajouter l'excellent ouvrage de M. Ringleb qui est appelé à rendre de grands services aux biologues. Il leur permet de se familiariser avec les méthodes mathématiques dont l'emploi devient de plus en plus courant en Biologie. En voici le sommaire:

Graphische Darstellungen in der Biologie. — Grundbegriffe der Variationsstatistik. — Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Grundlagen der Vererbungslehre. — Mathem. Konstruktion von Verteilungen mit gegebenen Ursachen. — Bestimmung der Ursachen von gegebenen biologischen Verteilungen. — Abhängigkeit zweier Merkmale voneinander (Korrelation).

L. Berzolari, G. Vivanti et D. Gigli. — **Enciclopedia delle Matematiche Elementari.** Vol. II, Parte II. — Un vol. in-8° de 574 pages, avec de nombreuses figures; Lire 75.—; U. Hoepli, Milan, 1938.

L'« Enciclopedia delle Matematiche Elementari » a pour but d'exposer sous une forme concise les éléments des principales théories des mathématiques élémentaires et de leurs applications. Elle se compose d'une série de monographies rédigées par des spécialistes éminents.

Nous avons eu déjà l'occasion de signaler les deux fascicules du Tome I (Arithmétique et Algèbre) et le premier fascicule du Tome II (Géométrie). La deuxième partie du Tome II comprend les monographies ci-après:

E. G. Togliatti: Massimi e minimi. — G. Lazzeri: Teoria elementare delle sezioni del cono e del cilindro rotondi. — C. Burali-Forti: Elementi di calcolo vettoriale. — B. Segre: Geometria analitica. — E. G. Togliatti: Geometria Proiettiva. — A. Comessati: Geometria descrittiva e applicazioni. — G. Loria: Curve e superficie speciali. — G. Fano: Geometrie non euclidee e non archimedee. — O. Chisini: Geometria elementare e matematiche superiori.

Cette rapide énumération suffit à montrer tout l'intérêt que présente ce recueil pour les professeurs qui désirent avoir un coup d'œil d'ensemble sur les branches qu'ils sont appelés à enseigner.

Le Tome III, actuellement en préparation, comprendra également deux parties; elles seront consacrées aux applications ainsi qu'à l'histoire et à la didactique mathématique.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux:

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

La Mathématique. Troisième partie du Tome I de l'*Encyclopédie française.* — Un vol. gr. in-4° de 336 pages avec de nombreuses illustrations; relié, Fr. 110; Encyclopédie française, 13, rue du Four, Paris.

L'*Encyclopédie française* comprendra 21 tomes publiés en fascicules en vente séparément. Le Tome I, intitué l'*Outillage mental*, est divisé en trois parties: la Pensée, le Langage et la Mathématique.

Publié sous la direction de M. P. Montel, Membre de l'Institut, avec la collaboration de savants éminents, la *Mathématique* donne un tableau d'ensemble des grands problèmes qui se posent actuellement aux mathé-