Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONTRIBUTION À LA CLASSIFICATION DES TRANSFORMATIONS CORRÉLATIVES RÉGULIÈRES DANS UN PLAN ET DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS

Kapitel: 1. — Lemmes.

Autor: Vyichlo, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28594

Sa classification est basée sur la généralisation de la classification affine des quadriques. Il distingue seulement deux groupes de corrélations dans l'espace, à savoir: la corrélation centrale et la corrélation parabolique. Dans le dernier groupe se trouvent quatre classes de corrélations. Toutes ces corrélations sont étudiées géométriquement.

La classification des transformations corrélatives planes se trouve aujourd'hui dans tous les livres d'enseignement concernant la géométrie projective [7].

Dans ce Mémoire nous ferons la classification des corrélations régulières qui se trouvent, soit dans un plan soit dans un espace à trois dimensions, à l'aide des trois propriétés projectives invariantes, à savoir: à l'aide des couples involutifs, à l'aide de la qualité et de la position réciproque des coniques ou des quadriques fondamentales de la corrélation. Nous montrerons que le nombre de couples involutifs, la qualité et la position réciproque des surfaces fondamentales forment la propriété caractéristique d'un cas de la corrélation.

Dans la première partie de notre Mémoire nous emploierons cette propriété à la classification de la corrélation en groupes et plus tard (dans la seconde partie) nous écrirons les équations des corrélations de ces groupes différents seulement quant à cette propriété.

1. — Lemmes.

Soit A la matrice à n colonnes des éléments a_{ik}, $(i, k = 1, \dots n)$ et soient ${}^i x$, ${}^i \xi$, etc. $(i = 1, 2)$ les matrices des coordonnées d'un point ou d'un plan qui appartient à l'espace $i^{\text{ième}}$; c'est-à-dire

$$ {}^i x = \begin{pmatrix} {}^i x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ {}^i x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & . & . & \dots & . \\ {}^i x_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{etc.} \tag{1} $$

[7] O. Veblen — J. W. Joung, *Projective Geometry*, I, p. 278.
A. Commessatti, *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva*, II, p. 252.
J. Vojtěch, *Geometrie projektivní*, p. 296.
Voir aussi: P. Lévy, Sur les transformations corrélatives. *Bulletin Soc. mathématique de France*, 1929.

L'équation d'une corrélation régulière qui existe entre les espaces ${}^1\Sigma$, ${}^2\Sigma$ est la suivante:

$$ {}^2\xi = A \cdot {}^1x \ , \tag{2} $$

où A est la matrice régulière, c'est-à-dire Dét. $|A| \neq 0$.

La corrélation qui est donnée par (2) est appelée la corrélation A.

A l'hyperplan ${}^1\xi$ correspond, dans A régulière, le point ${}^2x$ déterminé par l'équation

$$ {}^2x = \overline{A}^{-1} \cdot {}^1\xi \ . \tag{3} $$

La démonstration est évidente.

Dans ce qui suit, nous nous occuperons des corrélations A régulières qui existent entre deux espaces collocaux, c'est-à-dire nous supposerons que l'on ait Dét. $|A| \neq 0$ et ${}^1\Sigma \equiv {}^2\Sigma$.

THÉORÈME 1. — Quand et uniquement quand tous les éléments correspondants dans les deux espaces coïncident, la matrice A est demi-symétrique. Cette corrélation est régulière uniquement quand la dimension (à savoir le nombre $n - 1$) est un nombre impair [8].

La corrélation considérée s'appelle *système nul* ou *corrélation nulle.*

Démonstration: a) Quand on a

$$ {}^2\overline{\xi} \cdot {}^1x = 0 $$

pour n'importe quel ${}^1x$, c'est-à-dire

$$ {}^1\overline{x} \cdot A \cdot {}^1x = 0 \ , $$

la matrice de cette forme quadratique est égale à zéro.

Or

$$ A + \overline{A} = 0 \ , \qquad \text{ou} \qquad A = -\overline{A} \ . $$

b) Si nous poursuivons la succession d'idées, nous obtiendrons

$$ {}^2\overline{\xi} \cdot {}^1x = 0 $$

pour n'importe quel ${}^1x$.

[8] Si $n = 2$ (sur une droite), nous avons l'homographie.

On trouve de même

$$^1\bar{\xi} \cdot {}^2x = 0 .$$

c) La matrice demi-symétrique et d'ordre impair n'est jamais régulière.

Théorème 2. — Le système nul est la corrélation involutive.

Démonstration: Au point $^1x \equiv {}^2x$ correspondent les hyperplans

$$^2\xi = \mathrm{A} \cdot {}^1x , \qquad {}^1\xi = \bar{\mathrm{A}} \cdot {}^1x .$$

Si nous supposons $\mathrm{A} = - \bar{\mathrm{A}}$, il vient $^2\xi \equiv {}^1\xi$.

Théorème 3. — Si A n'est pas la corrélation nulle, les points du premier espace et aussi du deuxième espace, qui coïncident avec leurs hyperplans correspondants, forment une seule hyperquadrique.

Nous appelons cette surface la quadrique ponctuelle fondamentale et nous la désignons par K_1.

Démonstration: Si

$$^2\bar{\xi} \cdot {}^1x = 0$$

et respectivement

$$^1\bar{\xi} \cdot {}^2x = 0 ,$$

on a

$$^1\bar{x} \cdot \bar{\mathrm{A}} \cdot {}^1x = 0$$

et respectivement

$$^2\bar{x} \cdot \bar{\mathrm{A}} \cdot {}^2x = 0 .$$

Ce sont les équations de la même hyperquadrique à matrice $\mathrm{A} + \bar{\mathrm{A}}$.

Théorème 4. — Si A n'est pas la corrélation nulle, les hyperplans du premier espace et aussi du deuxième espace, qui coïncident avec leurs points correspondants, enveloppent une seule hyperquadrique.

C'est la deuxième quadrique fondamentale de la corrélation A. Nous la désignons par K_2.

Démonstration semblable à celle faite plus haut.

L'équation de K_2 est

$$^1\bar{\xi} \cdot (\mathrm{A}^{-1} + \bar{\mathrm{A}}^{-1}) \cdot {}^1\xi = 0 .$$

THÉORÈME 5. — N'importe quelle quadrique fondamentale correspond à l'autre dans la corrélation A.

La démonstration en est immédiate.

THÉORÈME 6. — Les quadriques fondamentales K_1, K_2 ont la même caractéristique *(rang)* [9].

Démonstration:

$$A^{-1} + \overline{A}^{-1} = A^{-1} \cdot (A + \overline{A}) \cdot \overline{A}^{-1} .$$

THÉORÈME 7. — Si nous faisons la correspondance entre les points de l'espace et leurs plans polaires par rapport à la quadrique régulière $\overline{{}^1x} \,.\, B \,.\, {}^1x = 0$ (où B est la matrice symétrique), nous obtenons la corrélation involutive, régulière, à savoir ${}^2\xi = B \,.\, {}^1x$. Les quadriques fondamentales de cette corrélation se confondent avec la quadrique donnée; la corrélation est appelée polarité.

Inversement: Si la matrice A est symétrique, la corrélation A est la polarité par rapport à la surface $\overline{{}^1x} \,.\, A \,.\, {}^1x = 0$.

Démonstration: Le plan polaire d'un point ${}^1x$ par rapport à la quadrique $\overline{{}^1x} \,.\, B \,.\, {}^1x = 0$ (où $|B| \neq 0$) est ${}^2\xi = \overline{B} \,.\, {}^1x = B \,.\, {}^1x$. La corrélation ${}^2\xi = B \,.\, {}^1x$ possède évidemment les propriétés énoncées.

Si A est la matrice symétrique, l'équation ${}^2\xi = A \,.\, {}^1x$ détermine le plan polaire du point ${}^1x$ par rapport à la quadrique $\overline{{}^1x} \,.\, A \,.\, {}^1x = 0$.

THÉORÈME 8. — Si la dimension de l'espace pris en considération (à savoir le nombre $n - 1$) est un nombre impair, il existe deux corrélations involutives, à savoir, le système nul et la polarité. Si la dimension est paire, il existe une seule corrélation involutive, à savoir la polarité.

Démonstration: Si A est la corrélative involution, on a l'identité $\rho \,.\, A \,.\, {}^1x = \overline{A} \,.\, {}^1x$ ($\rho \neq 0$ est une constante), pour n'importe quelle valeur ${}^1x$. En raison de cette équation nous pouvons écrire $\rho \,.\, A = \overline{A}$, ou $\rho a_{ik} = a_{ki}$, c'est-à-dire $\rho^2 a_{ik} = a_{ik}$, $\rho = \pm 1$; (au moins une valeur a_{ik} est différente de zéro).

Enfin $\overline{A} = \pm A$.

---

[9] Le rang (la caractéristique) de la quadrique est égal au rang (à la caractéristique) du discriminant de cette surface.

THÉORÈME 9. — Tous les points et de même tous les plans des couples involutifs appartenant à la corrélation A sont justement tous les points ou les plans doubles de l'homographie ${}^1x' = \overline{A}^{-1} . A . {}^1x$.

C'est pourquoi la corrélation A possède au moins une paire involutive.

Démonstration: Si $({}^1x;\ {}^2\xi)$ est une paire involutive de la corrélation A, on déduit:

$$ {}^2\xi = A \cdot {}^1x \ , \qquad \rho \cdot {}^1x = \overline{A}^{-1} \cdot {}^2\xi \ . $$

c'est-à-dire $\rho . {}^1x = \overline{A}^{-1} . A . {}^1x$. Or, le point ${}^1x$ est le point double de l'homographie $\overline{A}^{-1} . A$.

La succession d'idées peut être achevée.

THÉORÈME 10. — Soit $({}^1x;\ {}^2\xi)$ un couple involutif de la corrélation A et que ${}^1x$ (resp. ${}^2\xi$) ne soit pas un élément singulier de la surface K_1 (resp. K_2). Ensuite ${}^2\xi$ est le plan polaire du point ${}^1x$ par rapport à K_1, le point ${}^1x$ est le pôle du plan ${}^2\xi$ par rapport à K_2.

Démonstration: D'après la supposition nous avons

$$ \rho \cdot A \cdot {}^1x = \overline{A} \cdot {}^1x $$

respectivement

$$ \rho \cdot A^{-1} \cdot {}^2\xi = \overline{A}^{-1} \cdot {}^2\xi \ . $$

C'est-à-dire

$$ (A + \overline{A}) \cdot {}^1x = (1 + \rho) \cdot A \cdot {}^1x = {}^2\xi \cdot (1 + \rho) $$

respectivement

$$ (A^{-1} + \overline{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi = (1 + \rho) \cdot A^{-1} \cdot {}^2\xi = {}^1x \cdot (1 + \rho) \ . $$

THÉORÈME 11. — Soit $({}^1x;\ {}^2\xi)$ un couple des éléments correspondants dans A et soit ${}^2\xi$ le plan polaire du point ${}^1x$ par rapport à K_1 (resp. ${}^1x$ le pôle du plan ${}^2\xi$ par rapport à K_2).

Alors les éléments ${}^1x$, ${}^2\xi$ forment un couple involutif $({}^1x;\ {}^2\xi)$ de la corrélation A.

Démonstration: On a:

$$ {}^2\xi = A \cdot {}^1x $$

et aussi

$$ \rho \cdot {}^2\xi = (A + \overline{A}) \cdot {}^1x \ . $$

C'est-à-dire

$$(\rho - 1) \cdot A \cdot {}^1x = \overline{A} \cdot {}^1x \, .$$

De même

$${}^1x = A^{-1} \cdot {}^2\xi \, , \qquad \rho \cdot {}^1x = (A^{-1} + \overline{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi \, ,$$

ou

$$(\rho - 1) \cdot A^{-1} \cdot {}^2\xi = \overline{A}^{-1} \cdot {}^2\xi \, .$$

THÉORÈME 12. — Au point singulier de la quadrique K_1 correspond involutivement le plan qui est singulier pour K_2 et qui passe par ce point.

Démonstration: Soit ${}^1x$ le point singulier de K_1; alors on a

$$(A + \overline{A}) \cdot {}^1x = 0 \qquad \text{ou} \qquad A \cdot {}^1x = - \overline{A} \cdot {}^1x \, .$$

C'est-à-dire le point ${}^1x$ appartient au couple involutif. Soit ${}^2\xi = A \, . \, {}^1x$; ensuite nous avons:

$$(A^{-1} + \overline{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi = (I + \overline{A}^{-1} \cdot A) \cdot {}^1x = \overline{A}^{-1} \cdot (\overline{A} + A) \cdot {}^1x = 0 \, ,$$

c'est-à-dire ${}^2\xi$ est le plan singulier de la quadrique K_2.

THÉORÈME 13. — Le plan d'une paire involutive qui n'est pas le plan singulier de la surface K_2, possède tous les points singuliers de la quadrique K_1. Le point d'un couple involutif qui n'est pas singulier pour la quadrique K_1 est situé dans tous les plans singuliers de la surface K_2.

Démonstration: Elle découle des théorèmes 12 et 10.

2. — LA CLASSIFICATION DES CORRÉLATIONS PLANES.

THÉORÈME 14. — Les coniques fondamentales de la corrélation plane A se confondent en une seule conique quand et uniquement quand, la corrélation est la polarité.

Preuve: Soit $K_1 \equiv K_2$. Ensuite la droite qui correspond au point ${}^1x$ de la conique K_1 est la tangente de cette courbe en ${}^1x$. L'homographie $\overline{A}^{-1} \, . \, A$ possède chaque point de la conique K_1 pour point double et il en résulte qu'elle est l'identité.

En raison du théorème 8, la corrélation A est la polarité. Dans ce qui suit nous exclurons ce cas et nous supposerons que A ne soit pas la polarité.