

2. — La classification des corrélations planes.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

C'est-à-dire

$$(\rho - 1) \cdot A \cdot {}^1x = \bar{A} \cdot {}^1x .$$

De même

$${}^1x = A^{-1} \cdot {}^2\xi , \quad \rho \cdot {}^1x = (A^{-1} + \bar{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi ,$$

ou

$$(\rho - 1) \cdot A^{-1} \cdot {}^2\xi = \bar{A}^{-1} \cdot {}^2\xi .$$

THÉORÈME 12. — Au point singulier de la quadrique K_1 correspond involutivement le plan qui est singulier pour K_2 et qui passe par ce point.

Démonstration: Soit 1x le point singulier de K_1 ; alors on a

$$(A + \bar{A}) \cdot {}^1x = 0 \quad \text{ou} \quad A \cdot {}^1x = -\bar{A} \cdot {}^1x .$$

C'est-à-dire le point 1x appartient au couple involutif. Soit ${}^2\xi = A \cdot {}^1x$; ensuite nous avons:

$$(A^{-1} + \bar{A}^{-1}) \cdot {}^2\xi = (I + \bar{A}^{-1} \cdot A) \cdot {}^1x = \bar{A}^{-1} \cdot (\bar{A} + A) \cdot {}^1x = 0 ,$$

c'est-à-dire ${}^2\xi$ est le plan singulier de la quadrique K_2 .

THÉORÈME 13. — Le plan d'une paire involutive qui n'est pas le plan singulier de la surface K_2 , possède tous les points singuliers de la quadrique K_1 . Le point d'un couple involutif qui n'est pas singulier pour la quadrique K_1 est situé dans tous les plans singuliers de la surface K_2 .

Démonstration: Elle découle des théorèmes 12 et 10.

2. — LA CLASSIFICATION DES CORRÉLATIONS PLANES.

THÉORÈME 14. — Les coniques fondamentales de la corrélation plane A se confondent en une seule conique quand et uniquement quand; la corrélation est la polarité.

Preuve: Soit $K_1 \equiv K_2$. Ensuite la droite qui correspond au point 1x de la conique K_1 est la tangente de cette courbe en 1x . L'homographie $\bar{A}^{-1} \cdot A$ possède chaque point de la conique K_1 pour point double et il en résulte qu'elle est l'identité.

En raison du théorème 8, la corrélation A est la polarité. Dans ce qui suit nous excluons ce cas et nous supposons que A ne soit pas la polarité.

THÉORÈME 15. — Quand les coniques fondamentales de la corrélation A sont les coniques irréductibles nous n'allons distinguer que deux cas:

1° La conique K_1 est tangente à K_2 aux deux points a, b ; la corrélation A possède trois couples involutifs $(a; T_a)$, $(b; T_b)$, $(T_a \times T_b; ab)$, où T_a, T_b sont les tangentes communes en a , respectivement en b .

2° Les coniques K_1 et K_2 ont, au point a , le contact quadriponctuel (d'ordre trois); la corrélation A possède un couple involutif $(a; T_a)$, où T_a est la tangente au point a .

Démonstration: Soit a le point commun des coniques irréductibles K_1, K_2 . La droite qui correspond involutivement au point ${}^1a \equiv a$ est la tangente de K_2 . Le théorème 10 montre que cette droite est aussi tangente à K_1 en a . Il en résulte que les coniques K_1 et K_2 peuvent posséder en commun soit deux points distincts a, b avec les tangentes T_a, T_b , soit un seul point a avec contact quadriponctuel.

1° Dans le premier cas la droite ab correspond involutivement au point $0 \equiv (T_a \times T_b)$. (Voir fig. 1.) La corrélation A n'a pas les autres couples involutifs. Soit $(p; P)$ un tel couple; d'après le théorème 10 le point p est situé sur la droite ab . Si le point 1r est un point des points communs à la droite P et à la conique K_1 , il correspond involutivement à la droite $p{}^1r \equiv {}^2X$. Ensuite

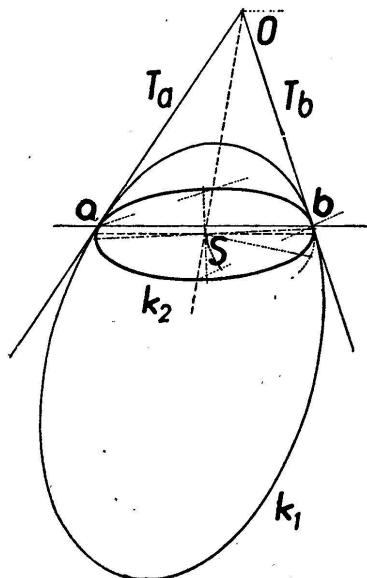


Fig. 1

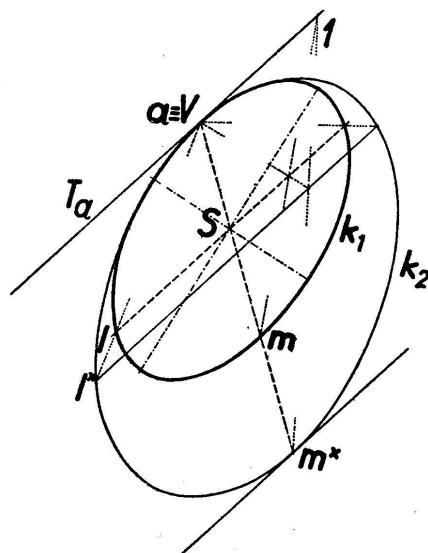


Fig. 2.

l'homographie \bar{A}^{-1} . A a quatre points doubles, à savoir: $a, b, (T_a \times T_b), {}^1r$ qui sont linéairement indépendants, et par suite elle est l'identité, c'est-à-dire que la corrélation A est la polarité. (*Per absurdum.*)

2° Dans le second cas, nous n'avons qu'un seul couple involutif, à savoir $(a; T_a)$. (Voir fig. 2.) Si $(p; P)$ est un autre couple involutif, le point p est situé sur la tangente T_a (d'après le théorème 10). Le point 1y qui est un point des points d'intersection de la conique K_1 et de la droite P correspond involutivement à la droite ${}^1yp \equiv {}^2Y$. C'est-à-dire que la conique K_2 passe par le point ${}^1y \neq a$. Mais les coniques K_1, K_2 possèdent en a le contact d'ordre 3 en commun.

THÉORÈME 16. — Quant à la conique K_1 décomposée en deux droites distinctes L, S et quant à la conique K_2 décomposée en deux points l_1, l_2 , nous avons seulement un cas.

3° La droite $L_2 \equiv l_1 l_2$ passe par le point $l \equiv (L \times S)$. Ni le point l_1 ni le point l_2 ne peuvent coïncider en l . La corrélation A a deux couples involutifs: $(l; L_2), (s; L_1)$, où s est le point de la droite L_2 pour lequel $(lsl_1 l_2) = -1$ et L_1 est la droite du faisceau (l) déterminé par le birapport harmonique $(LSL_1 L_2) = -1$.

Démonstration: Le théorème 12 montre que $(l; L_2)$ est un couple involutif et que l est situé sur L_2 . (Voir fig. 3.) La droite 2S du faisceau (l) , qui correspond au point ${}^1s \equiv s$ donné sur L par la relation $(lsl_1 l_2) = -1$, forme avec s un couple involutif d'après le théorème 11.

D'après le théorème 10 nous avons ${}^2S \equiv L_1$, où L_1 est la droite du faisceau (l) pour laquelle $(LSL_1 L_2) = -1$. Si un couple $(p; P)$, différent de $(l; L_2)$, est un couple involutif de la corrélation A , nous déduirons, d'après le théorème 13, que p est situé sur L_1 , c'est-à-dire $P \equiv L_1, p \equiv s$.

THÉORÈME 17. — Si la conique K_1 est dégénérée en droite double L et si la conique K_2 est le point double l , on peut démontrer que:

4° Le point l n'est pas situé sur la droite L . La corrélation A possède le couple $(l; L)$ involutif et le faisceau des couples $(x; X)$

involutifs, où x parcourt la droite L et où X est la droite xl .
(Voir fig. 4.)

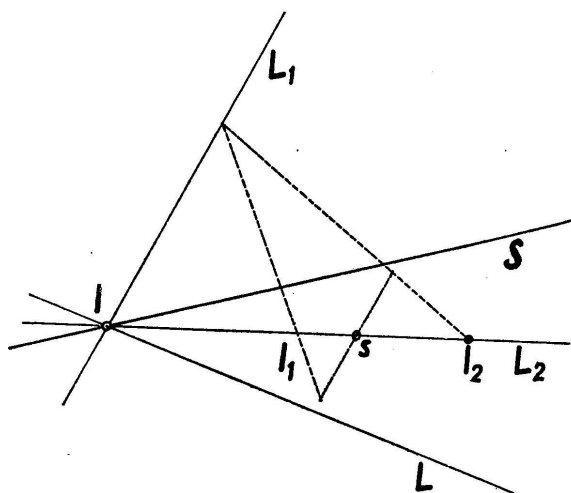


Fig. 3.

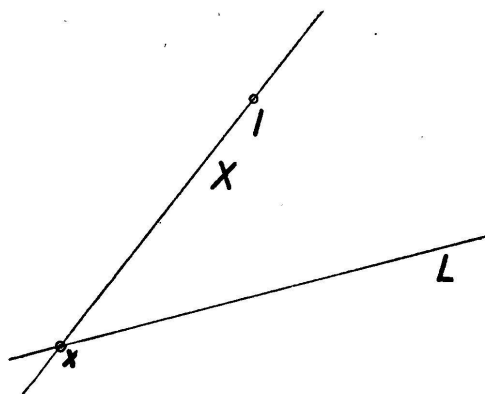


Fig. 4.

La démonstration est simple.

THÉORÈME 18. — Si nous choisissons convenablement le système des coordonnées, nous pouvons écrire pour la corrélation du premier ou du quatrième cas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Quand, et uniquement quand $a_{21} \neq \pm a_{12}$, nous obtenons le premier cas et, quand et uniquement quand $a_{21} = -a_{12}$, nous obtenons le quatrième.

Preuve: Nous choisirons dans le premier cas: $a \equiv o_1$, $b \equiv o_2$, $(T_a \times T_b) \equiv o_3$; dans le quatrième: $l \equiv o_3$; les deux points de la droite L_2 , qui sont distincts et différents de l , seront pris pour o_2 , respectivement o_3 .

Si $a_{21} = a_{12}$, la corrélation est la polarité. (D'après le théorème 7.) Si $a_{21} = -a_{12}$, la conique K_1 est la droite double.

THÉORÈME 19. — La corrélation du cas 3^o peut être écrite:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{11} \neq 0.$$

Preuve: Soit $s \equiv o_3$, $L_1 \equiv x_3 = 0$, $l \equiv o_2$.

Comme K_1 est la conique décomposée en deux droites L, S qui passent par o_2 , on a $a_{21} = -a_{12}$, $a_{11} \neq 0$.

THÉORÈME 20. — La corrélation du cas 2^o peut être écrite de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{21} \neq 0.$$

Démonstration: Soit $a \equiv o_3$, $T_a \equiv x_1 = 0$.

Soit o_2 un point arbitraire sur T_a et soit $x_2 = 0$ la droite qui correspond au point o_2 en A . Enfin soit o_1 le point d'intersection de la conique K_1 avec la droite $x_2 = 0$. (Voir fig. 5.)

Les droites qui correspondent au point $(0 : y_2 : y_3)$ dans les deux espaces pris en considération sont:

$${}^2(a_{13}y_3 : a_{22}y_2 : 0), \quad {}^1((a_{21}y_2 + a_{31}y_3) : a_{22}y_2 : 0).$$

L'équation $a_{13}y_3 : a_{22}y_2 = (a_{21}y_2 + a_{31}y_3) : a_{22}y_2$ a (d'après le théorème 15) une unique solution, à savoir: $y_2 = 0$; alors nous aurons $a_{31} = a_{13}$; $a_{21} \neq 0$.

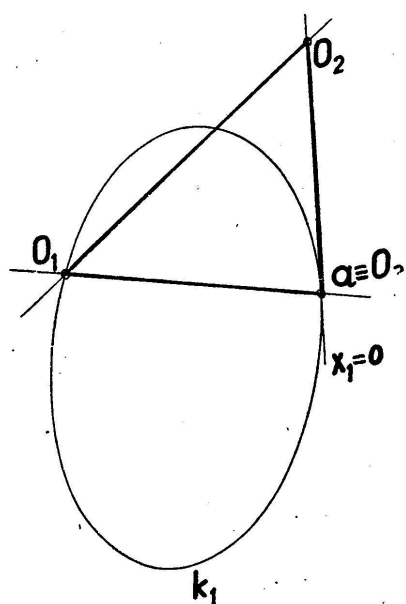


Fig. 5.

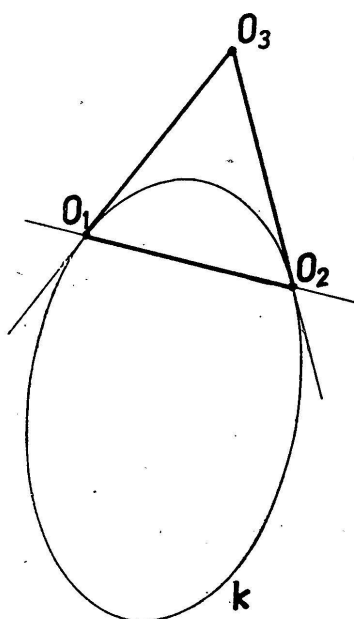


Fig. 6.

THÉORÈME 21. — La polarité plane peut être écrite d'une des manières suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Le choix des systèmes des coordonnées est évident. (Voir fig. 6 et 7.)

3. — LA CLASSIFICATION DES CORRÉLATIONS DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS.

THÉORÈME 22. — Chaque corrélation régulière dans l'espace possède un couple involutif des éléments qui coïncident.

Démonstration: Le théorème 9 montre que chaque corrélation A a un couple involutif $({}^1a; {}^2\alpha)$. Soit le point 1a en dehors du plan ${}^2\alpha$. Les plans ${}^2\xi$, qui correspondent aux points 1x du plan ${}^2\alpha$, coupent ${}^2\alpha$ aux droites 2X . Les éléments des couples $({}^1x; {}^2X)$ correspondent l'un à l'autre dans une corrélation plane B non singulière (Dét. $|B| \neq 0$) qui possède un couple involutif des éléments coïncidents. Ensuite le plan déterminé par le point 1a et par la droite 2B correspond involutivement au point 1b dans A .

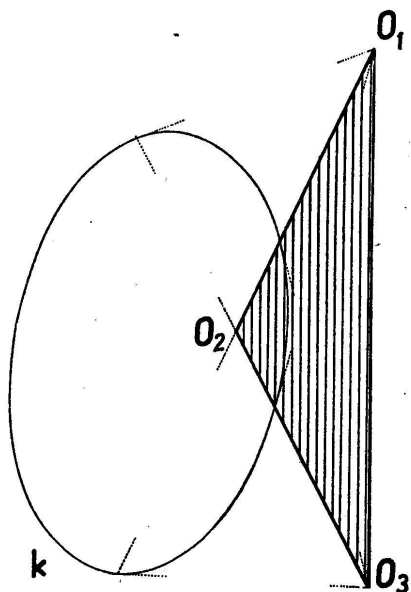


Fig. 7.

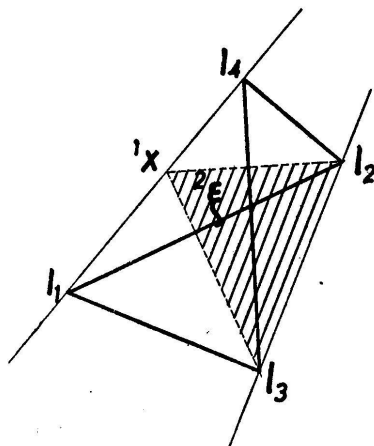


Fig. 8.