

3. — La classification des corrélations dans un espace à trois dimensions.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THÉORÈME 21. — La polarité plane peut être écrite d'une des manières suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Le choix des systèmes des coordonnées est évident. (Voir fig. 6 et 7.)

3. — LA CLASSIFICATION DES CORRÉLATIONS DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS.

THÉORÈME 22. — Chaque corrélation régulière dans l'espace possède un couple involutif des éléments qui coïncident.

Démonstration: Le théorème 9 montre que chaque corrélation A a un couple involutif $({}^1a; {}^2\alpha)$. Soit le point 1a en dehors du plan ${}^2\alpha$. Les plans ${}^2\xi$, qui correspondent aux points 1x du plan ${}^2\alpha$, coupent ${}^2\alpha$ aux droites 2X . Les éléments des couples $({}^1x; {}^2X)$ correspondent l'un à l'autre dans une corrélation plane B non singulière (Dét. $|B| \neq 0$) qui possède un couple involutif des éléments coïncidents. Ensuite le plan déterminé par le point 1a et par la droite 2B correspond involutivement au point 1b dans A .

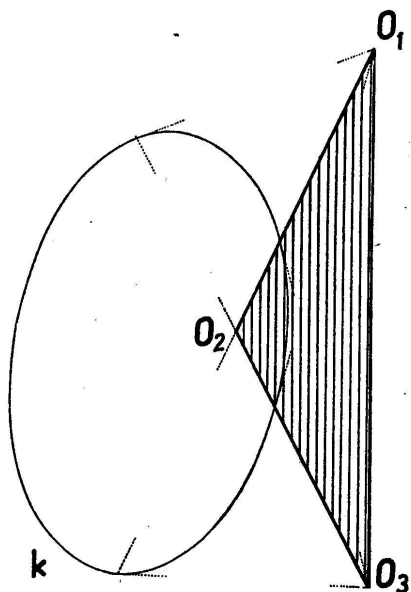


Fig. 7.

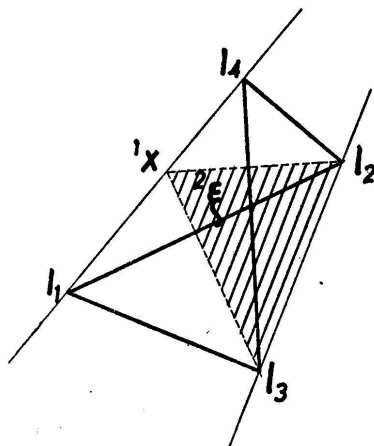


Fig. 8.

THÉORÈME 23. — Quand les quadriques fondamentales de la corrélation A ont le rang 4, cinq cas vont se présenter :

1° Les quadriques K_1, K_2 possèdent un quadrilatère gauche $l_1 l_2 l_3 l_4$ en commun. La corrélation a quatre couples involutifs :

$$(l_1; \lambda_1), \quad (l_2; \lambda_2), \quad (l_3; \lambda_3); \quad (l_4; \lambda_4)$$

où

$$\lambda_1 \equiv (l_1 l_2 l_3), \quad \lambda_2 \equiv (l_1 l_2 l_4), \quad \lambda_3 \equiv (l_1 l_3 l_4), \quad \lambda_4 = (l_2 l_3 l_4).$$

(Voir fig. 8.)

2° K_1, K_2 possèdent un quadrilatère gauche $l_1 l_2 l_3 l_4$ en commun. La corrélation a les couples involutifs suivants : $(l_2; \lambda_2), (l_3; \lambda_3), ({}^1x; {}^2\xi)$, où λ_2, λ_3 sont les plans, mentionnés plus haut et où le point 1x parcourt la droite $l_1 l_4$; le plan ${}^2\xi$ est déterminé par les points ${}^1x, l_2, l_3$. (Voir fig. 8.)

3° K_1, K_2 possèdent les droites, de système gauche, L_2, L_3 et leur transversale double $l_4 l_3$ en commun. La corrélation a deux couples involutifs : $(l_3; \lambda_3), (l_4; \lambda_4)$, où $\lambda_3 \equiv (l_4, L_3), \lambda_4 \equiv (l_3, L_2)$. (Voir fig. 9.)

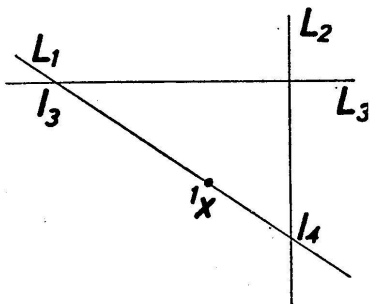


Fig. 9.

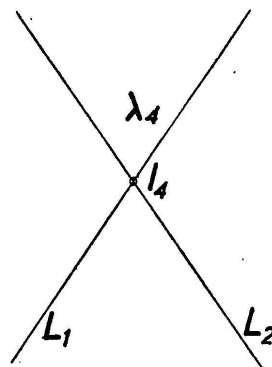


Fig. 10.

4° K_1, K_2 possèdent les droites de système gauche L_2, L_3 et leur transversale double $l_4 l_3$ en commun. La corrélation a un faisceau des couples involutifs $({}^1x; {}^2\xi)$, où 1x parcourt la droite $l_4 l_3$; ${}^2\xi$ est un plan du faisceau $(l_4 l_3)$. (Voir fig. 9.) (Le plan (l_3, L_2) correspond au point l_4 et le plan (l_4, L_3) correspond au point l_3 .)

5° K_1, K_2 possèdent deux droites doubles L_1, L_2 (qui se coupent au point l_4) en commun, c'est-à-dire que les surfaces K_1, K_2 sont tangentes l'une à l'autre le long des droites L_1, L_2 . (Voir fig. 10.)

La corrélation a un unique couple involutif, à savoir $(l_4; \lambda_4)$, où $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$.

Démonstration: D'après le théorème 22 il existe un point l_4 qui correspond au plan λ_4 et qui coïncide avec ce plan. Ce plan est tangent à la quadrique K_1 au point l_4 (d'après le théorème 10). Alors, il coupe K_1 aux droites L_1, L_2 . Les droites L_1, L_2 sont les droites doubles d'une homographie B induite en λ_4 par l'homographie $\bar{A}^{-1} \cdot A$, qui a le plan λ_4 pour le plan double. La position des points doubles l_2, l_3 de l'homographie B et par suite de l'homographie $\bar{A}^{-1} \cdot A$ donne trois cas:

a) Les points l_2, l_3 sont situés sur les deux droites L_1, L_2 . Les plans ${}^2\lambda_2 \equiv \lambda_2, {}^2\lambda_3 \equiv \lambda_3$ qui correspondent aux points ${}^1l_2 \equiv l_2, {}^1l_3 \equiv l_3$ en corrélation A , possèdent avec la quadrique respectivement les droites l_4l_2, l_4l_3 en commun. Ces plans se coupent en une droite qui coupe la quadrique K_1 (excepté le point l_4) au point l_1 . Le plan ${}^2\lambda_1 \equiv \lambda_1$ qui correspond à ce point ${}^1l_1 \equiv l_1$ possède les points $l_1l_2l_3$. Nous avons ainsi obtenu les cas 1^o et 2^o mentionnés plus haut.

b) Seulement un point (par exemple le point l_3) est situé sur L_1 mais aucune des droites de la quadrique K_1 , qui sont situées en λ_4 (c'est-à-dire L_2) ou en λ_3 (c'est-à-dire L_3) ne contiennent plus de point double de l'homographie $\bar{A}^{-1} \cdot A$. Dans le cas qui nous occupe nous obtiendrons les cas 3^o et 4^o.

c) Aucune droite des L_1, L_2 (en λ_4) ne contient un point double de l'homographie $\bar{A}^{-1} \cdot A$. C'est le cinquième cas de notre théorème. Le plan ${}^2\lambda_4 \equiv \lambda_4$, qui correspond au point ${}^1l_4 \equiv l_4$ en A , possède avec la quadrique K_1 deux droites L_1, L_2 en commun, qui sont aussi les droites de la quadrique K_2 , parce qu'elles sont les axes des faisceaux des plans tangents à la quadrique K_1 .

Or, dans le cas a) les surfaces K_1, K_2 ont un quadrilatère gauche en commun, dans le cas b) elles possèdent uniquement les droites L_2, L_3 et leur transversale $L_1 \equiv l_3l_4$ en commun.

Soit 1R une autre droite commune aux quadriques K_1, K_2 . La droite 1R est une transversale des droites L_2, L_3 . La droite 2R qui correspond à 1R en corrélation A , soit coïncide avec 1R soit ne coupe jamais la droite 1R . Si ${}^1R \equiv {}^2R$, nous obtiendrons les cas 1^o et 2^o. Si 1R et 2R sont les droites gauches, la droite 2R

coïncide avec $L_1 \equiv l_3l_4$, parce que 2R est aussi la droite commune aux surfaces K_1, K_2 . Or, ${}^1R \equiv L_1$.

Dans le dernier cas *c*) les quadriques K_1, K_2 possèdent uniquement les droites L_1, L_2 en commun et point d'autres. Si nous supposons que R soit une autre droite commune aux K_1 et K_2 , nous déduirons soit que R coupe L_1 mais jamais L_2 , soit que R coupe L_2 , mais non L_1 . Or, c'est le cas *b*) considéré plus haut. Si les quadriques K_1, K_2 ont un quadrilatère gauche commun, la corrélation A possède soit uniquement quatre couples involutifs que nous avons déjà pris en considération, et le cas 1^o se présente, soit, outre quatre couples mentionnés, un autre couple involutif (${}^1p; {}^2\pi$). Le point 1p est situé dans un plan du tétraèdre $l_1l_2l_3l_4$, mais jamais sur un côté du quadrilatère gauche. (Dans ce dernier cas la surface K_1 est tangente à la quadrique K_2 le long du côté mentionné.) (Voir théorème 10.) Alors le point 1p est situé sur l_1l_4 ou l_2l_3 . Ensuite, d'après théorème 9, n'importe quel point de cette droite est le point d'un couple involutif. C'est ce qui, en effet, a lieu tout au plus pour l'une des droites l_1l_4, l_2l_3 . (Voir théorème 27.) Nous obtenons ainsi le cas 2^o.

Si les surfaces K_1, K_2 possèdent un quadrilatère gauche incomplet en commun, la corrélation A a soit seulement deux couples involutifs, énoncés plus haut (cas 3^o), soit, outre ces couples, un autre couple involutif (${}^1p; {}^2\pi$). Le point 1p doit être situé sur le côté l_3l_4 . Dans le cas contraire la transversale X des droites gauches L_2L_3 , passant par le point, 1p est la droite double de l'homographie $\bar{A}^{-1} . A$. (Voir théorème 9.) C'est-à-dire : Un point des points d'intersection $(X \times L_2), (X \times L_3)$ au moins, est un autre point double de cette homographie. (Mais ce n'est pas notre supposition.) Ensuite n'importe quel point de la droite l_3l_4 est le point d'un couple involutif — d'après le théorème 9. C'est le cas 4^o qui a lieu.

Enfin si K_1, K_2 sont tangentes l'une à l'autre le long de deux droites L_1, L_2 qui se coupe en l_4 , la corrélation A possède évidemment un unique couple involutif, à savoir : $(l_4; \lambda_4)$, où $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$. Nous obtenons le cas 5^o.

THÉORÈME 24. — Quand les quadriques fondamentales de la corrélation A ont le rang 3, c'est-à-dire que K_1 est l'ensemble des

points du cône irréductible (au sommet ν), et que K_2 est l'ensemble des plans qui ont pour enveloppée une conique irréductible K du plan α , les cas suivants vont se présenter:

6° Le plan α coupe le cône K_1 en les deux droites distinctes L_1, L_2 , qui sont les tangentes de la conique K aux points l_1, l_2 . La corrélation a trois couples involutifs: $(\nu; \alpha)$, $(l_1; \lambda_1)$, $(l_2; \lambda_2)$, où λ_1, λ_2 sont les plans tangents du cône K_1 le long de la droite L_1 respectivement L_2 . (Voir fig. 11.)

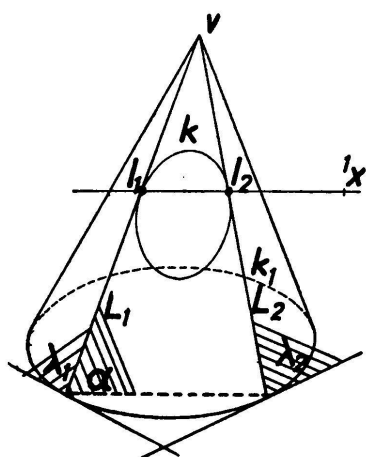


Fig. 11,

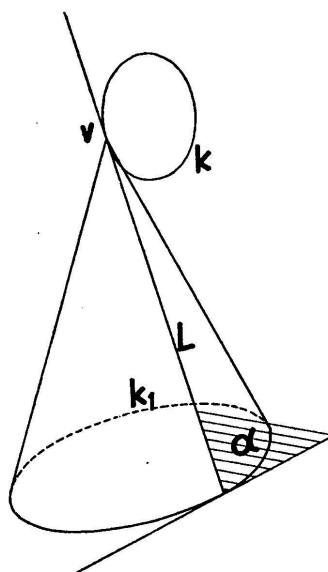


Fig. 12.

7° La position du cône K_1 et de la conique K est la même que dans le cas précédent (6°). La corrélation possède les couples involutifs: $(\nu; \alpha)$, $({}^1x; {}^2\xi)$, où le point 1x parcourt la droite l_1l_2 . (Voir fig. 11.)

8° Le plan α est tangent au cône le long de la droite L . La conique K est tangente à cette droite au point ν . La corrélation a un seul couple involutif, à savoir $(\nu; \alpha)$. (Voir fig. 12.)

Démonstration: Le couple $(\nu; \alpha)$ est le couple involutif — d'après le théorème 12 — et le plan α possède le point ν .

a) Soit α le plan qui coupe le cône K_1 aux deux droites différentes L_1, L_2 . Une droite au moins (par exemple L_1) coupe la conique K au point l_1 différent du sommet ν . Par suite les plans, qui correspondent aux points de la droite L_1 (ils forment un faisceau de l'axe L_1) sont tangents à la conique K , la droite L_1 est aussi la tangente de la courbe K au point l_1 . De la même manière nous déduirons que la droite L_2 est tangente à K en l_2 .

Les plans qui correspondent aux points l_1, l_2 forment avec ces points les couples involutifs (d'après le théorème 11). Ce sont les plans λ_1, λ_2 qu'il y a lieu de considérer.

Si le cas 6° n'a pas lieu, la corrélation possède outre les couples $(\nu; \alpha), (l_1; \lambda_1), (l_2; \lambda_2)$ une autre paire involutive, à savoir $({}^1x; {}^2\xi)$. D'après le théorème 10 le point 1x est situé sur la droite l_1l_2 . Or, en raison du théorème 9, n'importe quel point de la droite l_1l_2 appartient à une paire involutive. C'est le cas 7° qui se produit.

b) Soit maintenant α le plan qui est tangent au cône K_1 le long de la droite L. La corrélation A transforme la figure géométrique formée par les éléments (K_1, α, L) en figure formée par (K, ν, L) c'est-à-dire que la droite L est tangente à K en ν . Si $({}^1x; {}^2\xi)$ est un couple involutif et différent de $(\nu; \alpha)$, le point 1x est situé sur L. On en déduit que le plan ${}^2\xi$ possède la droite L; mais ce n'est jamais possible d'après le théorème 10. Or, le cas 8° a lieu.

THÉORÈME 25. — Si les surfaces K_1, K_2 ont le rang 2, c'est-à-dire si K_1 est une paire de plans α, β et K_2 est un couple des points a, b , nous avons trois cas :

9° Le point a est situé dans le plan α , le point b en β ; les droites $ab, (\alpha \times \beta)$, sont les droites formant système gauche. (Voir fig. 13.) La corrélation A, prise en considération, possède les couples involutifs suivants :

$$(a; \alpha), \quad (b; \beta), \quad ({}^1x; {}^2\xi),$$

où 1x parcourt la droite $(\alpha \times \beta)$ et ${}^2\xi$ est le plan du faisceau (ab) , à savoir ${}^2\xi \equiv ({}^1xab)$.

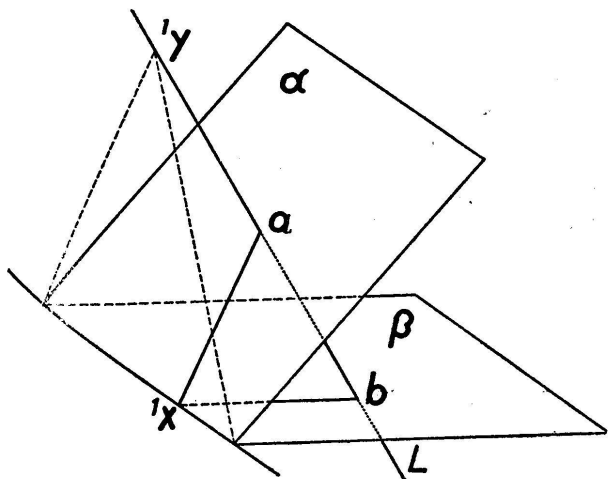


Fig. 13.

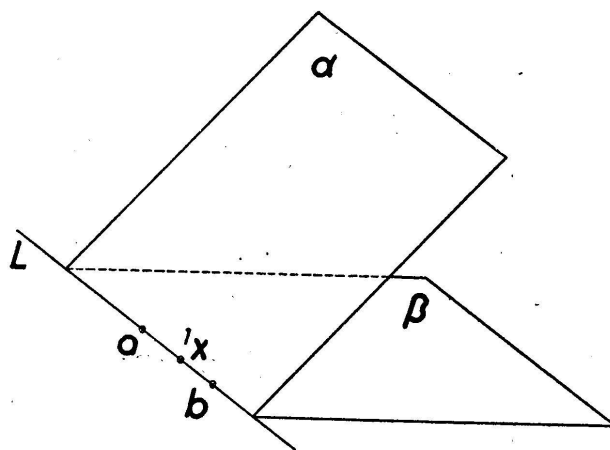


Fig. 14.

10° La position des K_1, K_2 est la même que dans le cas précédent. La corrélation possède les couples involutifs $({}^1x; {}^2\xi)$, $({}^1y; {}^2\eta)$, où 1x parcourt la droite d'intersection $(\alpha \times \beta)$, 1y parcourt la droite qui joint les points a, b et les plans ${}^2\xi, {}^2\eta$ sont déterminés de la manière suivante: (Voir fig. 13.)

$${}^2\xi \equiv ({}^1x a b), \quad {}^2\eta \equiv [{}^1y, (\alpha \times \beta)].$$

11° La droite qui joint les points a, b coïncide avec la droite d'intersection des plans α, β . La corrélation possède les paires involutives $({}^1x; {}^2\xi)$, où 1x parcourt la droite ab et où ${}^2\xi$ possède la droite $(\alpha \times \beta)$. (Voir fig. 14.)

Démonstration: Soit L l'axe du faisceau des plans qui correspondent aux points de la droite $(\alpha \times \beta)$ en corrélation A . L'axe L est formé avec $(\alpha \times \beta)$ dans une paire gauche de droites, ou coïncide avec $(\alpha \times \beta)$.

a) Soient $L, (\alpha \times \beta)$ les droites formant système gauche. Les points ${}^1x, {}^2x$ qui correspondent au plan $\alpha \equiv {}^1\alpha \equiv {}^2\alpha$, sont situés dans le plan α .

Dans le cas contraire les plans qui correspondent aux points du plan α coupent α aux droites qui correspondent aux mêmes points en corrélation B (Dét. $|B| \neq 0$). Mais cette corrélation possède uniquement les paires dont les éléments coïncident — ce qui n'a jamais lieu. Par conséquent les points ${}^1x, {}^2x$ sont situés sur L ; on a ${}^1x \equiv {}^2x \equiv (L \times \alpha)$. Ce point est aussi un des points a, b (de la conique K_2).

Soit par exemple ${}^1x \equiv a$; ensuite il y a $b \equiv (L \times \beta)$.

Si la corrélation A n'a d'autre paire involutive, le cas 9° se produit. Dans le cas contraire nous aurons un autre couple $({}^1x; {}^2\xi)$. D'après le théorème 13 le point 1x doit être situé sur ab et n'importe quel point de cette droite correspond involutivement à un plan et forme avec lui une paire involutive. Le cas 10° a lieu.

b) Si $L \equiv (\alpha \times \beta)$, les points a, b , sont situés aussi sur $(\alpha \times \beta)$. D'après le théorème 13 il n'est point d'autres points des couples involutifs en dehors de la droite ab . Le cas 11° va se présenter.

THÉORÈME 26. — Si les quadriques fondamentales ont le rang 1, c'est-à-dire si K_1 est le plan double α et si K_2 est le point double a , une seule possibilité se produit.

12° Le point a est situé dans le plan α et forme avec ce plan une paire involutive de la corrélation A. La corrélation possède les couples involutifs $(^1x; ^2\xi)$, où 1x parcourt le plan α , $^2\xi$ passe par le point a .

Preuve: Les points $^1a, ^2a$ qui correspondent au plan α sont situés dans le plan α . D'après le théorème 12 (et par analogie avec la démonstration du théorème 25 a) nous avons $^1a \equiv ^2a \equiv a$. Enfin il n'existe pas d'autre couple involutif $(^1x; ^2\xi)$ pour lequel 1x ne soit pas situé dans α . Dans le cas contraire on a $^2\xi \equiv \alpha$ (d'après le théorème 13); mais ce n'est jamais possible.

Dans ce qui suit, nous divisons les cas 1° à 12°, que nous avons pris en considération, en les quatre groupes suivants:

- En I^{er} groupe sont les cas: 1°, 2°, 9°, 10°;
- en II^e groupe sont les cas: 5°, 6°, 7°, 12°;
- en III^e groupe sont les cas: 3°, 4°, 11°;
- en IV^e groupe est le cas: 8°.

THÉORÈME 27. — Les corrélations du premier groupe peuvent être écrites de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les cas particuliers aient lieu sont dans:

- le cas 1°: $a_{41} \neq a_{14}$, $a_{32} \neq \pm a_{23}$;
- le cas 2°: $a_{41} = a_{14}$, $a_{32} \neq \pm a_{23}$;
- le cas 9°: $a_{41} = -a_{14}$, $a_{32} \neq \pm a_{23}$;
- le cas 10°: $a_{41} = -a_{14}$, $a_{32} = -a_{23}$.

Démonstration: Le choix du système des coordonnées dans les cas 1° et 2° est le suivant: Le tétraèdre fondamental est donné par les points $o_1 \equiv l_1$, $o_2 \equiv l_2$, $o_3 \equiv l_3$, $o_4 \equiv l_4$.

Dans les cas 9^o et 10^o nous choisissons $o_1 \equiv a$, $o_4 \equiv b$; les points o_2 et o_3 sont arbitraires sur la droite $(\alpha \times \beta)$. Les plans ${}^2\eta \equiv (a_{14}y_4 : 0 : 0 : a_{41}y_1)$, ${}^1\eta \equiv (a_{41}y_1 : 0 : 0 : a_{14}y_4)$ qui correspondent au point arbitraire $(y_1 : 0 : 0 : y_4)$ situé sur $o_1o_4 \equiv (\alpha \times \beta)$ doivent coïncider. (Voir le cas 9^o.) On en déduit la relation: $a_{14}^2 = a_{41}^2$.

Appendice à la démonstration du théorème 23: Il n'est pas possible, dans le cas général, que tous les points des droites o_1o_4 , o_2o_3 appartiennent aux couples involutifs. Si ce cas se présentait nous pourrions en déduire: $a_{14} = a_{41}$, $a_{23} = a_{32}$.¹⁰ D'après le théorème 7 la polarité a lieu.

THÉORÈME 28. — La matrice des corrélations du deuxième groupe est la suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{11} \neq 0.$$

Le cas 5^o se présente quand et uniquement quand

$$a_{41} \neq \pm a_{14}, \quad a_{23} \neq \pm a_{32};$$

pour le cas 6^o il est nécessaire et il suffit que:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} \neq \pm a_{23};$$

pour le cas 7^o que:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} = a_{23};$$

pour le cas 12^o que:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} = -a_{23}.$$

Démonstration: Le choix du système de coordonnées est le suivant: Dans le cas 5^o: $o_4 \equiv l_4$, le plan $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$ a l'équation $x_1 = 0$; o_2 est un point sur L_2 , ($o_2 \neq o_4$), o_3 est un point sur L_1 , ($o_3 \neq o_4$). Le plan $x_3 = 0$ correspond au point o_2 en A et $x_2 = 0$ correspond au point o_3 . Enfin o_1 est le point d'intersection des droites de la surface K_2 qui sont situées dans les plans $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

¹⁰ Nous obtenons, en tenant compte de la caractéristique de la corrélation A, $a_{14} \neq -a_{41}$, $a_{23} \neq -a_{32}$.

Les cas 6^o, 7^o: $o_4 \equiv v$, $o_2 \equiv l_1$, $o_1 \equiv l_2$, les plans λ_1 , λ_2 ont les équations $x_3 = 0$ respectivement $x_2 = 0$.

Le cas 12^o: $o_4 \equiv a$, le plan α a l'équation $x_1 = 0$. Les points o_2 , o_3 sont les points arbitraires dans le plan α , mais ils ne sont pas situés sur une droite qui passe par a . Les plans $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ correspondent respectivement aux points choisis o_3 , o_2 . Le coefficient a_{11} est différent de zéro afin que les cas du premier groupe n'aient pas lieu. Nous ferons la distinction des cas 5^o, 6^o, 7^o, par analogie avec celle que nous avons faite dans les cas 1^o et 2^o.

THÉORÈME 29. — La matrice des corrélations du troisième groupe peut être écrite de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{21} \neq 0.$$

Le cas 3^o va se présenter quand et uniquement quand

$$a_{41} \neq -a_{14}, \quad a_{32} \neq -a_{23} \\ a_{14} a_{23} - a_{41} a_{32} \neq 0.$$

Le cas 4^o:

$$a_{41} \neq -a_{14}, \quad a_{32} \neq -a_{23} \\ a_{14} a_{23} - a_{41} a_{32} = 0;$$

Le cas 11^o:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} = -a_{23}.$$

Démonstration: Dans les cas 3^o et 4^o nous choisissons le système des coordonnées suivant: $o_3 \equiv l_3$, $o_4 \equiv l_4$, le point o_2 est situé sur L_2 et correspond au plan $x_3 = 0$. Le point o_1 est le point d'intersection du plan $x_3 = 0$ avec la droite L_1 . Le choix du tétraèdre fondamental dans le dernier cas 11^o du troisième groupe est le suivant: $o_4 \equiv a$, $o_3 \equiv b$; les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sont les plans α (resp. β). Enfin le point o_1 se trouve sur la droite d'intersection des plans $x_3 = 0$, β . Nous déduisons la relation $a_{21} \neq 0$ en exprimant que la droite $o_4 o_2$ ne contient que le point o_4 , considéré comme l'élément d'un couple involutif.

Enfin nous allons différencier les cas 3^o et 4^o (l'un et l'autre) à l'aide de la méthode mentionnée dans les cas 1^o et 2^o.

THÉORÈME 30. — Les corrélations du quatrième groupe sont :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & -a_{23} & 0 & 0 \\ -a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{22} \neq 0, \quad a_{31} \neq 0.$$

Démonstration : Le choix du système fondamental des coordonnées est le suivant : $o_4 \equiv \nu$; le plan α a l'équation $x_1 = 0$; o_3 est situé sur L, le plan $x_3 = 0$ correspond à o_3 dans A. Le plan $x_4 = 0$ contient la seconde tangente (par o_3) de la conique K et le point o_1 correspond à $x_4 = 0$ dans A. Enfin o_2 est le point commun aux plans $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ et au plan qui correspond à o_1 dans \bar{A} . Le cône K_1 a le sommet $\nu \equiv o_4$ et il est tangent au plan $x_1 = 0$ le long de la droite $\overline{o_4 o_3}$. On en déduit $a_{23} = -a_{32}$, $a_{41} = -a_{14}$. Le cône K_1 n'est pas irréductible. Or, $a_{22} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$.

THÉORÈME 31. — La matrice de la corrélation polaire (de la polarité) peut être écrite des manières suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Ces formules correspondent aux deux équations bien connues des quadriques irréductibles.

THÉORÈME 32. — La matrice de la corrélation nulle (du système nul) peut être écrite :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & -a_{23} & 0 & 0 \\ -a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le choix du tétraèdre fondamental des coordonnées y est suivant : Un point de l'espace soit o_4 ; le plan qui lui correspond dans A soit $x_1 = 0$. Soient o_2, o_3 deux points arbitraires de ce plan. Que les plans correspondants à ces points dans A soient $x_3 = 0$ respectivement $x_2 = 0$ et enfin soit o_1 un point de la droite d'intersection des plans $x_2 = 0, x_3 = 0$. Or, le tétraèdre fondamental est choisi.