Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

A. Buhl. — **Nouveaux Eléments d'Analyse.** Calcul infinitésimal. Géométrie. Physique théorique. Tome III. Equations différentielles. — Un vol. gr. in-8° de vi-196 pages; prix: 90 francs; Gauthier-Villars, Paris, 1940.

Ce Tome troisième, comme les deux qui l'ont précédé en 1937 et en 1938, tomes dont nous avons publié des analyses, est à remarquer par son esprit synthétique, tout l'ouvrage semblant sortir d'un unique et primordial concept. Ici tout ce qui est véritablement transcendant, en matière d'équations différentielles, s'apparente à l'équation de Riccati. Cette équation préside d'abord à la Théorie du trièdre mobile dont les équations s'étendent facilement, sous la forme de Maurer-Cartan, pour conduire aux Groupes de Lie, au maniement général des formes de Pfaff, aux Espaces de Cartan, à la Géométrie de Cayley, à l'Electromagnétisme de Maxwell prolongé par De Donder en direction de la Gravifique, aux Fonctions automorphes de Poincaré, aux Séries hypergéométriques, aux Domaines de rationalité si bien utilisés par M. Jules Drach et qui permettent ici de faire une magnifique théorie de l'équation de Riccati réduite. En tout ceci, la Physique théorique, tout comme la Géométrie, semble indissolublement liée à l'Analyse.

Dans un Chapitre préliminaire, consacré aux Equations élémentairement intégrables, M. Buhl a laissé transparaître quelques opinions philosophiques qui ne rallieront peut-être pas toutes les convictions mais qui sont exposées avec autant de modération que de largeur d'esprit. On peut suivre des courbes intégrales *particulières* en les quittant *arbitrairement* pour continuer à cheminer sur une intégrale *singulière* tangente. N'y a-t-il pas là une possibilité de libre arbitre ? Joseph Boussinesq semblait déjà le croire. Et la cinématique corpusculaire semble apporter de nouveaux arguments en faveur de cette manière de concevoir. Il y a, de même, des conceptions microstructurales du mouvement franchement en dehors de la cinématique classique mais que l'on pourrait peut-être utiliser dans les profondeurs de l'atome. Et tout cela à propos d'équations différentielles très simples. D'ailleurs ces discussions philosophico-scientifiques ne peuvent avoir quelque valeur que si l'on peut les placer à la base de la Science, dans la région des Principes.

Plus loin, l'étude des groupes fuchsiens et des pavages du champ complexe qu'ils déterminent incitent à déplorer l'insuffisance humaine du *sens projectif*. En effet, on ne *voit* guère de tels pavages dès qu'ils se compliquent. Et cependant une belle analyse est là pour prouver leur existence. La Science finit alors par s'adresser beaucoup plus à notre entendement qu'à notre sensibilité, chose dite et si souvent répétée par Henri Poincaré.

Toutes ces hautes spéculations n'empêchent pas le volume de viser à des buts pratiques et de contenir beaucoup d'exercices. Souhaitons que, dans le même style, M. Buhl nous donne bientôt un quatrième tome consacré aux Equations aux dérivées partielles. H. Fehr.

Louis BACHELIER. — **Les nouvelles Méthodes du Calcul des Probabilités.** — Un fascicule gr. in-8° de VIII-72 pages, prix: 25 francs; Gauthier-Villars, Paris, 1939.

Les méthodes probabilitaires de M. Bachelier semblent avoir une curieuse originalité. Nous l'avons déjà dit. Ce sont des méthodes de continuité avec considérations intégrales invariantes. Il y a un principe de conservation pour la probabilité comme pour la conservation de la matière ou de l'énergie. La notion du nombre des parties jouées est étendue en celle d'un temps continu qui permet l'existence d'une Cinématique, voire d'une Dynamique des probabilités. Tout ceci en extension également avec le formalisme de Laplace dont les exponentielles s'échaffaudent de manière plus que complexe. Les formules asymptotiques étant continues dans l'espace, il y a des formules hyperasymptotiques qui sont continues dans le temps. Sans doute on a beaucoup parlé, dans toutes les écoles probabilistes, de probabilités continues mais plutôt en utilisant les méthodes ensemblistes et en parlant leur langage. Ici, ce sont les anciennes formules qui se complètent, prenant ainsi leur revanche sur l'ensemblisme sans formules et souvent les dédaignant.

Remarquables notions concernant la spéculation. C'est surtout là que chaque épreuve est un élément de temps. A chaque espèce d'épreuves peut correspondre un temps d'une nature spéciale. D'où des hyperespaces probabilitaires riches en connexions et semblables aux espaces en phase de la physique théorique.

M. Bachelier semble beaucoup aimer un terrain qu'il considère comme lui étant absolument propre. Quelles correspondances entre celui-ci et les domaines de l'Ecole borelienne ? Nous ne tenterons pas de répondre à cette question, surtout en quelques lignes. Signalons encore que notre Revue a déjà accueilli l'auteur avec plaisir quant à un article, sur *La Périodicité du Hasard*, publié en tête de notre volume de 1915.

A. BUHL (Toulouse).

Th. DE DONDER. — **L'Energétique déduite de la Mécanique statistique générale.** Leçons rédigées par Mlle Leuzière (La Chimie mathématique. Direction Th. De Donder. Volume IV). — Un fascicule gr. in-8° de 78 pages; prix: 40 francs; Gauthier-Villars, Paris, 1939.

Jolis développements de la *Théorie nouvelle de la Mécanique statistique* analysée précédemment dans *L'Enseignement mathématique* (37me année, 1938, p. 225). Et cette esthétique est tout ce qu'il y a de plus naturel. Elle repose sur les équations différentielles canoniques dont les transformations sont poursuivies dans le domaine des intégrales multiples, domaine qui est celui des extensions en phase. Le demi-dieu que fut Maxwell s'était déjà dirigé par là et M. De Donder le complète comme il l'a déjà complété en étendant ses équations électromagnétiques en direction de la Gravifique. Les vraies délicatesses de la Mécanique statistique sont dans le domaine microcosmique et l'analyse du savant auteur est assez pénétrante pour les exprimer mais il faut pouvoir remonter de là au macrocosme, aux Principes ordinaires de la Thermodynamique, aux systèmes chimiques en mouvement, aux vitesses réactionnelles.

Une équation générale de *transport* se particularise aisément dans les

milieux massiques, notamment vers les équations hydrodynamiques d'Eugène et François Cosserat mieux enseignées, plus connues maintenant à Bruxelles qu'à Toulouse. Quant aux transports énergétiques, ils sont, d'abord et aisément, d'accord avec les transports thermiques, les transports entropiques, mais par une méthode dont l'uniformité promet d'être féconde et présage une théorie relativistique dont on devine presque les termes tensoriels complémentaires.

Les mêmes principes de transport vont jouer dans les systèmes à plusieurs constituants, vers les idées de Gibbs et la notion d'affinité.

Si l'on voulait, le langage physique ne serait, en tout ceci, qu'un assemblage d'images permettant de suivre des invariances intégrales concernant des domaines étendus et mesurables. Mais, sous ces images, l'Analyse mathématique possède ses existences propres surtout réservées, au point de vue physique, à l'observateur *subtil*. L'observateur ordinaire, en approfondisssant l'Analyse ici en cause, peut acquérir, à son tour, la subtilité qui l'incite non à voir mais à comprendre une Statistique qui, en son essence, reste toujours proche des Principes mêmes du Calcul intégral. La belle exposition de M. Théophile De Donder est une fine œuvre d'art.

A. Buhl (Toulouse).

I. Prigogine. — **Contributions à la Théorie des Electrolytes forts** (La Chimie mathématique. Direction Th. De Donder. Volume V). — Un fascicule gr. in-8° de 54 pages; prix: 40 francs; Gauthier-Villars, Paris, 1939.

Remarquable application de la Mécanique statistique telle qu'elle a été élaborée par Th. De Donder. Il s'agit d'une théorie électrolytique de Debye-Hückel non aussi claire qu'on le croyait d'abord et que des considérations statistiques convenables semblent clarifier de la manière la plus heureuse. Quoiqu'il en soit, l'analyse est simple et ce sont notamment des considérations de différentielle totale qui limitent le domaine d'applicabilité de la Mécanique statistique des systèmes à champ moléculaire.

Il y a un concept remarquable de l'ion central et de son nuage ionique. C'est de la symétrie sphérique qui conduit à une équation de Poisson-Boltzmann, généralisation de celle de Poisson. Mais pour passer de là rigoureusement, et d'ailleurs élégamment, à l'équation de Debye-Hückel, un simple passage à la limite ne suffit pas; il faut avoir recours à la méthode de l'alvéole utilisée, de manière systématique, par Th. De Donder dans la *Théorie mathématique de l'Electricité*. Nous avons publié ici (25me année, 1926, p. 147) un compte rendu de ce dernier ouvrage; un autre, un peu plus détaillé encore, a paru dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* vers la même époque. Déjà les considérations alvéolaires nous semblaient fondamentales comme régions singulières infinitésimales à résorber dans quelque raisonnement continu.

A propos de la Thermodynamique des électrolytes forts en solution diluée, nous trouvons des conditions d'intégrabilité qui ne peuvent jouer qu'avec la particularisation de certaines constantes. Curieuse analogie avec certaines structures groupales.

Pour les solutions concentrées d'électrolytes forts, il faut de nouveaux recours à l'hypothèse; la structure de la solution se rapprocherait d'une structure quasi cristalline.

Cette chimie mathématique est vraiment très curieuse; elle semble donner une réalité à la Géométrie des nombres et du discontinu. Ses difficultés d'extension rappellent celles offertes, dans le domaine de l'Analyse pure, par les systèmes différentiels. Ce que l'auteur semble concevoir en excellent mathématicien. A. Buhl (Toulouse).

Marcel Boll. — **Les quatre faces de la Physique.** Explications concrètes suivies de Notes complémentaires et d'index. — Un vol. in-8° de 336 pages; prix: 30 francs; Les Editions rationalistes, Ch. Rieder, Paris, 1939.

Ouvrage de vulgarisation bourré de faits, de notes, de références qui pourront être utiles en bien d'autres mains que celles de l'homme du monde. Les quatre faces dont il s'agit semblent envisagées en quatre chapitres: I. L'Espace-Temps; II. L'Impulsion-Energie; III. La charge électrique; IV. Le Quantum d'action.

Le talent vulgarisateur de l'auteur est bien connu. Ici je le magnifierai peut-être un peu moins qu'en nombre de circonstances précédentes, car il se complique d'un esprit polémique qui, s'il est naturel, aurait cependant gagné à être plus serein. Je sais bien que beaucoup d'adversaires des théories modernes font figure d'individus dont l'incompréhension n'a rien de sympathique mais, vis-à-vis de tels personnages, c'est une faute que de se départir du plus grand calme.

L'ouvrage ayant été écrit avant la guerre, il y est question (p. 14) de la faiblesse des démocraties, et (p. 15) des crédits affectés aux marchands de mort subite. Depuis les événements se sont imposés en dehors de toutes ces discussions,

Beaucoup de citations sont d'un esprit plus heureux, par exemple (p. 17) celle qui concerne Paul Dirac et d'après laquelle les nouvelles théories sont construites en partant de concepts qui ne peuvent être décrits au moyen des notions qui nous sont familières ni même au moyen des mots existants.

M. Marcel Boll est également partisan du déterminisme absolu. Sur ce point je ne suis pas aussi ferme que lui. Défendre ainsi le déterminisme me semble toujours analogue à une défense de l'absolue analyticité en matière purement mathématique.

Il est impossible, ici, d'analyser en détail les chapitres mentionnés tout à l'heure. Le premier est essentiellement einsteinien. Bravo, sans aucune réserve ! Les autres en sont des émanations aboutissant notamment à la difficile et glorieuse Mécanique ondulatoire.

Un index biographique, très soigneusement établi, met sous les yeux du lecteur une collection de noms illustres garantissant, à eux seuls, l'appel aux plus hautes formes de l'intelligence. Des références théoriques évoquent l'idée de grandes richesses explicatives concernant aussi bien la géométrie riemannienne que l'effet photo-électrique et les films sonores. Un peu plus de véritable philosophie m'aurait souri. Mais l'exposition scientifique proprement dite m'intéresse et me satisfait grandement.

A. Buhl (Toulouse).

R. Dugas. — **Essai sur l'Incompréhension mathématique.** Préface de G. Bouligand. — Un vol. in-8° de IV-132 pages; prix: 25 francs; Vuibert, Paris, 1940.

Après cette sorte d'incompréhension physique dont M. Marcel Boll nous

a entretenus dans l'ouvrage précédent, voici l'incompréhension mathématique offerte plus particulièrement aux méditations des mathématiciens. Il y en a de nombreuses variétés, depuis celle qui est de nature pédagogique jusqu'à celle qui concerne les théories modernes jugées avec un prétendu bon sens qui ne peut analyser comme il conviendrait.

M. Bouligand, dans sa Préface, me fait l'honneur d'une citation concernant les aires sphériques se conservant par projection conoïdale sur le cylindre circonscrit à la sphère. Je ne tire point vanité de la chose, étant persuadé que cette projection était déjà connue d'Archimède mais vraiment elle a été un peu trop oubliée depuis. MM. Estève et Mitault, dans leur *Cours de Géométrie*, écrit pour la Classe de Première (T. II, p. 196), ont réindiqué l'idée. Il y a comme cela bien des facilités incomprises. Et cependant il y a un danger de la facilité lorsque celle-ci n'exerce point suffisamment la finesse d'esprit. Par exemple il y aurait trop de facilité dans la continuité selon Cauchy, celle-ci dissimulant les doubles semi-continuités de Baire.

Il semble impossible, en toute rigueur, de soutenir que les mathématiques soient matière à consentement universel. Leur compréhension comporte une part d'acceptation subjective sur laquelle nous ne pouvons rien dire. Telle est (p. 41) l'une des opinions les plus saillantes du livre. Et (p. 43) il s'agit de l'étiologie de l'incompréhension plutôt que de la thérapeutique.

Signalons six Notes terminales: I. Sur l'incompréhension de l'infini; II. Définitions de la continuité (Euler, Cauchy, Baire); III. Exercices d'incompréhension; IV. Difficulté des axiomes de la Mécanique; V. Difficultés du langage et rôle des représentations en Mécanique rationnelle; VI. Incompréhension en Mécanique appliquée. Ceci sans préjudice d'une remarque sur la « légalité » en Mécanique quantique.

Une sorte de postface revient sur les erreurs célèbres qui n'ont jamais été si bien cataloguées que par M. Maurice Lecat dans un livre analysé ici même (T. 34, 1935, p. 121). On voit, dans ce livre, que Galois est l'exemple rarissime d'un très grand mathématicien n'ayant jamais erré. Mais ce fut, peut-être, le plus *incompris* de tous. L'incompréhension mathématique est un vaste thème.

Les difficultés axiomatiques me ramènent au Congrès de Liége signalé déjà dans le présent volume (p. 163). Parmi les Communications s'en trouve une, *Sur les fondements de l'Arithmétique*, due à M. A. Errera, où le savant analyste bruxellois écrit qu'il peut y « avoir scrupule à se servir du raisonnement pour justifier le raisonnement ». Je suis tenté de dire qu'un tel scrupule manifeste une *surcompréhension* tout à fait à l'opposite de l'incompréhension. Hilbert ne s'est pas encore tiré d'oppositions de ce genre qui me donnent parfois l'impression que la Science finit par se dévorer elle-même.

A. Buhl (Toulouse).

R. Estève et H. Mitault. — **Arithmétique décimale** conforme au Programme de la Classe de Mathématiques. — Un volume in-16 (18 × 13) de vi-126 pages et 8 figures avec Exercices; prix: 18 francs; Gauthier-Villars, Paris, 1939.

Les deux auteurs, déjà bien connus par de nombreuses publications concernant l'Enseignement secondaire, ont donné à ce manuel le titre d'*Arithmétique décimale* pour bien résumer l'idée maîtresse de la péda-

gogie qui y est exposée: se rapprocher le plus possible d'un enseignement logique en rapport étroit avec le concret.

Le nouveau programme de la Classe de Sixième est caractérisé par l'emploi des nombres décimaux en liaison avec la mesure des grandeurs.

Ils n'ont pas eu d'autre ambition dans la Classe terminale de l'Enseignement secondaire.

Le nombre décimal, mesure d'une grandeur, conduit à la notion presque immédiate, par approximation illimitée, d'un nombre décimal généralisé, parallèle à la notion de segment de droite, que ce segment soit commensurable ou non avec l'unité de longueur.

Ce souci constant d'un étroit contact avec la réalité a conduit à ne dire, de la théorie abstraite des nombres, conformément au programme de la Classe de Mathématiques d'ailleurs, que ce qui permet d'approfondir la notion de nombre généralisé et d'en poursuivre l'étude.

Toujours dans le même esprit, on s'est refusé à séparer l'Arithmétique des autres parties des Mathématiques et on n'a pas hésité à recourir à l'Algèbre, à la Géométrie, à la Théorie des vecteurs, à l'Analyse même, toutes les fois que cela a paru apporter quelque simplification.

On ne s'est également décidé à écrire ce petit livre qu'après avoir longuement médité l'exposé critique de M. H. Lebesgue sur la *Mesure des grandeurs*, exposé qui a paru sur plusieurs années de *L'Enseignement mathématique* à partir de 1932.

On a cru devoir indiquer comment les notions d'aire plane et de volume précèdent heureusement celles de longueur de courbe plane et d'aire de surface gauche.

Et finalement on montre beaucoup de reconnaissance à M. Georges Bouligand dont la « Géométrie infinitésimale directe », si elle ne s'adresse pas encore aux collégiens, peut, du moins, éclairer vivement leurs professeurs.

Au total, Arithmétique très éclectique avec de nombreux exercices très bien choisis dont certains concernent, par exemple, des séries numériques. Les mystères concernant les nombres premiers sont opportunément signalés.

A. Buhl (Toulouse).

L. Escande. — **Etude de quelques écoulements comportant la formation d'une veine de courant. Vannes de fond, barrages-déversoirs, piles de pont** (Publications du ministère de l'Air, n° 163. Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Toulouse). — Un volume gr. in-8° (27 × 19) de xvi-164 pages; prix: 50 francs; Ed. Blondel La Rougery, Gauthier-Villars, Paris, 1940.

Nouvelle et riche publication de M. Escande. On peut prendre connaissance du sujet rien qu'en examinant les admirables photographies de l'ouvrage d'ailleurs imprimé, avec grand luxe, sur papier couché. Quand on aura examiné ainsi les veines noyées et dénoyées issues des différents types de vannes et de barrages, on sera porté à analyser la mathématique du sujet, avec l'idée qu'il doit y avoir de belles formules correspondant à des phénomènes d'aspects aussi esthétiques.

L'analyse de l'auteur semble être une combinaison des égalités hydrostatiques avec des équations de la théorie eulérienne et, là où cette combinaison ne peut donner des résultats suffisamment simples, emploi de gra-

phiques et d'abaques d'origine surtout expérimentale. On n'en arrive pas moins aux cas à *solutions multiples*, à ceux où de simples points figuratifs traversent des zones à *effets uniques* ou *indéterminés* et ce par des manœuvres qui, en général, ne sont pas *commutatives*. Ce sont là des questions mises à l'ordre du jour, en hydraulique, par M. Camichel, questions dont le brillant disciple qu'est M. Escande a repris de nombreux cas toujours d'accord avec des observations personnelles finement approfondies. L'Ecole de Toulouse, dans les domaines précédents, continue à se signaler de la façon la plus heureuse. Il est à peine besoin de rappeler que les obstacles fixes, noyés dans l'eau courante, sont assimilables, au moins sous de nombreux rapports, aux solides mobiles dans un fluide d'abord immobile. D'où une théorie *aérodynamique* des piles de pont alors comparables aux ailes d'avion. Le sujet rejoint ainsi les *Barrages*, du même auteur, publiés en 1937, par la réunion de trois fascicules des *Actualités scientifiques*, et dont *L'Enseignement mathématique* a rendu compte alors (36me année, 1937, p. 287). Il s'agit manifestement de grands travaux honorant, à la fois, M. Escande et le brillant Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Toulouse alors dirigé par M. Charles Camichel.

A. Buhl. (Toulouse).

Florentin Leroy. — **Cours d'Algèbre et d'Analyse.** Mathématiques spéciales. Elèves ingénieurs. Etudiants des Facultés. Agrégation. Essai d'enseignement concret et intuitif. Tome II, Analyse. — Un volume gr. in-8o de x-352 pages; prix: 70 francs; Vuibert, Paris, 1940.

Le Tome premier (Algèbre) de cet ouvrage a déjà été analysé ici (**34,** 1935, p. 297). Dans le présent Tome II (Analyse) la manière concrète et intuitive de l'auteur semble s'être quelque peu compliquée. Les formules touffues, chargées d'indices, sont assez nombreuses. Par contre, les graphiques sont toujours excellents. L'auteur fait peut-être une distinction assez artificielle entre fonctions définies directement et fonctions définies indirectement par procédés tels que l'intégration mais non sans avoir pris la précaution de nous avertir qu'on pénétrait ainsi dans le monde extrêmement général des équations différentielles.. D'ailleurs on termine par là.

L'ouvrage, maintenant complet, est assez comparable à un Cours de Mathématiques générales pourvu de cette sorte de rigueur intuitive particulière à M. Leroy mais on sent encore l'influence des programmes d'admission aux Ecoles plus que l'esprit libéral de l'enseignement d'un Paul Appell. On ne peut évidemment blâmer l'auteur qui a enseigné pour les élèves qui lui étaient confiés et qui l'a fait excellemment. Mais je m'étonnerai, une fois de plus, d'un fait qui m'a toujours vivement frappé. Quand on lit des Mémoires très élevés, par exemple ceux de Poincaré sur les Fonctions automorphes, on constate que l'appareil des inégalités et des indices itérés en est totalement absent. Est-il bien utile, dès lors, d'introduire cet appareil dans les exposés didactiques élémentaires ? Je sais bien que ces exposés peuvent servir à d'autres choses, à pousser notamment, dans des voies nouvelles, l'analyse du continu et du discontinu. Quoiqu'il en soit, M. Florentin Leroy, Professeur au Lycée de Rennes, a repensé et réanalysé la matière qui lui était confiée et ce avec beaucoup de conscience. Beaucoup d'exercices. Quinze résumés synthétiques d'Analyse et d'Algèbre terminent le volume de façon particulièrement heureuse. A. Buhl (Toulouse).

Sophie PICCARD. — **Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien** (Mémoires de l'Université de Neuchâtel, tome XIII). — Un vol. grand in-8° de 212 pages; Fr. suisses 7,50; Université de Neuchâtel, 1939.

L'ouvrage de Mlle S. Piccard est, comme l'indiquent son titre et le nom de la collection dont il fait partie, un travail de recherches.

Pour un traité, le sujet eut été un peu mince, alors qu'il est un excellent thème de recherches, comme l'avaient déjà montré des publications de MM. Steinhaus, Sierpinski, Ruziewicz et comme le prouve à nouveau le mémoire de Mlle Piccard. Le premier chapitre de ce mémoire rappelle et coordonne les résultats antérieurement acquis et est, en ce sens, un petit traité sur la matière.

C'est à ce titre que le mémoire de Mlle Piccard doit être signalé dans cette Bibliographie réservée aux ouvrages d'ensemble; aussi je ne m'arrêterai guère sur les apports personnels de l'Auteur, bien qu'ils soient nombreux et variés. Pour les apprécier pleinement il faudrait d'ailleurs, ainsi qu'il arrive toujours, être déjà quelque peu familiarisé avec le sujet alors que plus d'un lecteur se demande sans doute quel intérêt peut présenter l'étude des ensembles de distances.

Nous avons hérité des Pythagoriciens une conception un peu étriquée des mathématiques: les données doivent y être en nombre fini. Sans doute, si l'une d'elles est, par exemple, un segment, une infinité de points est donnée; seulement, depuis les Grecs jusque vers la fin du XIXe siècle, on s'était astreint à éviter toute considération sur cet ensemble infini. Depuis les travaux de Cantor, nous assistons à l'élaboration d'une géométrie des infinités, ou plutôt d'une géométrie des ensembles, dont les premiers éléments dérivent surtout de l'antique notion de limite, précisée et élargie dans diverses directions; éléments limites, ensembles dérivés, ensembles ouverts, fermés, etc. D'où, quand il s'agit d'ensembles de points, la considération des distances entre les divers points d'un ensemble ou entre ceux de deux ensembles. C'est à ces ensembles des distances étudiés délibérément pour la première fois, je crois, par M. Hugo Steinhaus, qu'est consacrée l'étude de Mlle Piccard.

Une plus complète connaissance des ensembles de distances pourra conduire à des élargissements utiles de la notion de limite. D'autre part, si E est un ensemble de points d'un axe Ox, l'ensemble D des distances entre points de E est la somme des ensembles déduits de E par les translations qui amènent en O les divers points de E (ou plutôt la partie de cette somme située sur le demi-axe Ox à abscisses positives). Cette génération de D utilise l'addition d'ensembles dont la collection n'est parfois ni finie, ni dénombrable, et cette opération nouvelle en somme, a pu fournir des ensembles difficiles à obtenir autrement; c'est ainsi que M. Sierpinski montre à l'aide de l'axiome de Zermelo que lorsque E est mesurable B (ou mesurable L), D peut être non mesurable B (ou non mesurable L).

Le deuxième chapitre s'occupe des ensembles égaux à leurs complémentaires ou à l'ensemble des distances de leurs points; ensembles que la génération précédemment indiquée de D met assez nettement en évidence. Pour citer au moins un énoncé montrant la liaison entre les questions, je signale que, pour qu'un ensemble linéaire E soit égal à son complémentaire, il faut et il suffit qu'il existe un nombre positif n'appartenant à aucun des ensembles D relatifs respectivement à E et son complémentaire.

Le chapitre III traite de D quand E est un ensemble parfait, des ensembles de distances entre points de deux ensembles parfaits et des mesures de ces ensembles. Le dernier chapitre aborde la question très importante des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble de nombres positifs soit un ensemble D. Dans ces deux derniers chapitres, l'auteur envisage souvent des nombres écrits dans la numération à base n et se rapproche ainsi de l'arithmétique.

Les raisonnements sont toujours très clairement exposés; comme ils appartiennent, ainsi que presque tous ceux relatifs aux ensembles, à cette catégorie de considérations simples mais minutieuses qu'on aime en général mieux reconstituer par soi-même que lire mot à mot, l'impression, d'ailleurs très bien faite, aurait dû mettre davantage en évidence les énoncés caractéristiques et les subdivisions des démonstrations.

H. LEBESGUE (Paris).

Gabor SZEGÖ. — **Orthogonal Polynomials** (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII). — Un vol. grand in-8° de VIII-401 pages; $ 6,50; Mathematical Society, New-York, 1939.

Ce livre fait partie d'une collection que tout le monde connaît, ce qui me dispense de parler de sa bonne présentation et de sa parfaite impression.

L'auteur se défend à diverses reprises d'avoir cherché à être complet; comment aurait-il pu l'être sur un sujet intimement lié à tant de théories et avec presque tous les calculs qui ont été réellement effectués. Aussi M. Szegö signale-t-il des ordres de questions qu'il a systématiquement laissé de côté et il ne me pardonnerait pas d'écrire que son livre est une encyclopédie, mais il me permettra bien de le qualifier d'ouvrage de référence que devront avoir sous la main tous ceux qui s'occuperont des polynômes orthogonaux. Ils y trouveront, avec les faits et les formules, des références nombreuses à des traités et à des mémoires originaux dont l'énumération occupe plus de dix-neuf pages. Et, pour que le passage de ces traités et mémoires à son livre soit facilité, M. Szegö a soin d'indiquer les différences de dénominations ou de notations; ainsi, après avoir fixé ses propres notations pour les polynômes de Jacobi, il écrit à peu près: « Stieltjes (à tel endroit), Fejér (à tel autre) écrivent α et β là où nous écrivons $\frac{1}{2}(\beta + 1)$ et $\frac{1}{2}(\alpha + 1)$. La fonction $Z_n(u)$ de Jordan s'écrit de telle manière avec notre notation. La fonction $G_n(p, q, u)$ de Courant-Hilbert se réduit à $Z_n(u)$ avec $p = \alpha$, $q = \gamma$. »

Il ne faudrait pas croire pourtant que M. Szegö a écrit une sorte de dictionnaire ou de formulaire; c'est un traité sur les polynômes orthogonaux qu'il nous donne. Il résume les règles qu'il s'est imposées à peu près comme il suit: « Je me suis efforcé d'indiquer les méthodes principales et caractéristiques, et de mettre en évidence leurs relations avec les idées générales de l'Analyse moderne; donnant la préférence à celles qui m'ont fourni l'occasion de quelque contribution nouvelle, quoique modeste, ou d'une modification à la présentation habituelle ». Et tous ceux qui connaissent l'ingéniosité de M. Szegö savent à l'avance que de telles occasions se sont présentées très souvent.

Rattacher des méthodes aux idées générales de l'Analyse cela n'est pas

du tout, dans l'esprit de M. Szegö, bâtir une belle théorie générale d'où tout se déduirait; une telle théorie ferait abstraction de l'individualité de diverses classes de polynômes orthogonaux et permettrait d'aller moins loin qu'une étude directe de ces classes, aussi la plus grande partie de l'ouvrage est-elle consacrée à des polynômes spéciaux dits classiques, quant aux théories générales, elles occupent pour ce qui est de la partie élémentaire, le chapitre III, et, pour les parties plus élevées, les chapitres XII et XIII seulement. L'ouvrage est donc très réaliste; il n'y s'agit pas de calculs que l'on déclare pouvoir faire, mais de calculs effectués; aussi il faudra que le lecteur lise la plume à la main, en refaisant tous les calculs, pour en tirer tout le profit possible.

Le premier chapitre rappelle les faits, d'ailleurs nombreux et variés, que le lecteur doit connaître. Au chapitre II, l'orthogonalité de f_n et φ_n est définie par la relation $\int_a^b f_n \varphi_n \, d\alpha(x) = 0$, l'intégrale étant une intégrale de Stieltjes; les principales classes de polynômes orthogonaux classiques sont définies par le choix de $\alpha(x)$. Dans le chapitre III on trouve la généralisation de la formule de Parseval, la notion de système complet (closed) de polynômes orthogonaux, les formules de récurrence entre polynômes, les propriétés les plus immédiates de zéros de ces polynômes et l'indication des relations entre polynômes orthogonaux et fractions continues. Le chapitre IV traite des polynômes de Jacobi généraux et de leurs cas particuliers, polynômes ultra-sphériques, polynômes de Legendre, etc.; l'équation différentielle du second ordre que vérifient les polynômes joue ici un rôle principal, les diverses expressions, intégrales ou autres, des solutions de cette équation sont étudiées. Le chapitre V, beaucoup plus bref, est consacré aux polynômes de Laguerre et à ceux d'Hermite. Le chapitre VI donne une étude très poussée de la distribution des zéros des polynômes orthogonaux; les diverses méthodes utilisables sont comparées, celle de Sturm est particulièrement importante. Le chapitre VII donne, pour des classes étendues de polynômes orthogonaux, les limites entre lesquelles varient ces polynômes, en particulier les limites des polynômes classiques. Le chapitre VIII est consacré à l'étude de la valeur asymptotique des polynômes quand leur degré augmente indéfiniment, pour un point pris soit hors de l'intervalle d'orthogonalité, soit dans cet intervalle; le cas des polynômes classiques est seul examiné ici, le cas général sera étudié au chapitre XII. Le chapitre IX traite, pour le cas des polynômes classiques, du développement en série de polynômes orthogonaux, d'une part d'une fonction analytique, d'autre part d'une fonction arbitraire, avec discussion de la convergence ou de la sommabilité de la série obtenue. Le cas des polynômes généraux est traité au chapitre XIII. Le chapitre X fournit une représentation des fonctions positives, généralisations d'un résultat de M. Fejèr et qui repose sur un théorème de Fatou. Le chapitre XI traite d'une généralisation de l'orthogonalité, l'intégrale qui sert de définition étant étendue au cercle de rayon unité; au chapitre XVI l'intégrale sera étendue à d'autres courbes fermées. J'ai déjà indiqué les thèmes principaux des chapitres XII et XIII; quant aux chapitres XIV et XV, il y s'agit de l'emploi des polynômes orthogonaux pour l'interpolation et pour les quadratures mécaniques.

En résumé un livre sérieux, difficile, mais riche.

H. Lebesgue (Paris).

L. PONTRJAGIN. — **Topological Groups.** Translated from the Russian by E. LEHMER. — Un vol. in-8° de 299 pages; relié, Dol. 4; Princeton University Press, 1939.

Voici un traité, le premier à notre connaissance, qui expose la théorie des groupes continus d'un point de vue général, conformément aux conceptions de la topologie et de l'algèbre modernes.

Après deux chapitres contenant la définition des groupes abstraits et des espaces topologiques et la démonstration de leurs propriétés essentielles utilisées dans la suite, un groupe continu (ou groupe topologique) est défini, au chapitre 3, comme un espace topologique dans lequel est donnée une loi de multiplication qui en fait un groupe abstrait, telle que l'inverse d'un élément a et le produit de deux éléments a et b soient fonctions continues de a et b. Les notions de sous-groupe, d'espace et de groupe quotients, d'isomorphisme et d'homéomorphisme sont présentées d'une manière tout à fait générale, et le chapitre se termine par quelques propriétés des groupes connexes et des groupes à zéro dimension.

Le chapitre 4, après une théorie de l'intégration sur un groupe compact (théorie due à Haar, simplifiée par J. von Neumann), expose les résultats fondamentaux de Peter et Weyl sur la représentation linéaire des groupes compacts et se termine par une application aux fonctions presque périodiques. Le chapitre 5 étudie d'une manière approfondie les groupes commutatifs localement compacts; la méthode employée consiste dans la construction du groupe des caractères, méthode due à l'auteur, qui s'est révélée un instrument utile dans d'autres domaines des mathématiques; comme application, il est établi que les seuls corps topologiques localement compacts et connexes sont les trois corps connus des nombres réels, des nombres complexes et des quaternions.

Avec le concept de groupe de Lie, étudié sommairement au chapitre 5, on voit apparaître pour la première fois les méthodes classiques de l'analyse infinitésimale. Le chapitre 7 montre comment l'étude des groupes continus compacts se ramène à celle des groupes de Lie compacts, établissant en particulier le théorème de J. von Neumann d'après lequel tout groupe compact localement connexe à un nombre fini de dimensions est un groupe de Lie; ce théorème résout, pour les groupes compacts, un problème célèbre de Hilbert, problème qui reste ouvert pour les groupes localement compacts.

Le chapitre 8 expose les résultats de Schreier concernant les relations globales entre groupes localement isomorphes; c'est l'occasion d'introduire la notion de groupe fondamental (de Poincaré) et celle d'espace de recouvrement, qui permettent de construire le groupe de recouvrement simplement connexe d'un groupe continu connexe localement et globalement, et simplement connexe localement. Enfin, le chapitre 9 et dernier, consacré à la structure des groupes de Lie, a contrairement au reste de l'ouvrage, plutôt le caractère d'une introduction; il établit les théorèmes fondamentaux de Lie, indique la classification des groupes semi-simples (renvoyant pour plusieurs démonstrations à un ouvrage en russe de Tchebotareff, dont une traduction serait bienvenue) et termine par quelques brèves remarques sur les groupes de transformations.

Cet ouvrage est sans doute appelé à devenir classique et rendra de grands services, en rendant plus aisément accessibles d'importantes théories. L'auteur y fait preuve d'un réel talent pédagogique, réussissant à obtenir

une rigueur et une précision absolues jusque dans tous les détails en même temps qu'une vue claire et élevée de l'ensemble des questions traitées.

G. DE RHAM (Lausanne).

E. BOREL et A. CHÉRON. — **Théorie mathématique du bridge.** 134 tableaux de probabilités avec leurs modes d'emploi; formules simples; applications. Environ 4000 probabilités. — Un vol. in-8° de 410 pages; fr. 175; Gauthier-Villars, Paris, 1940.

MM. E. Borel et A. Chéron se sont fort heureusement associés pour la publication d'une théorie mathématique très approfondie d'un des jeux les plus répandus: le bridge. Ils n'ont pas craint, semble-t-il, de parler le langage des probabilités, même à ceux qui ne sont « pas géomètres », contrairement à Pascal qui, pour cette raison, se refusait à en discuter avec quelque contemporain notoire.

M. Borel, dont la gloire mathématique est bien connue, présente M. Chéron (rédacteur du bridge aux journaux « Le Temps » et « L'Illustration »), comme un très grand spécialiste de ce jeu passionnant et comme un homme ayant un goût très vif et des aptitudes exceptionnelles pour les calculs numériques et leur interprétation.

C'est à M. Chéron que l'on doit en particulier, les tableaux très clairs et d'un usage presque immédiat, qui permettent de répondre aux questions les plus importantes que l'on peut se poser au cours d'une partie de bridge ou de tout autre jeu de 52 cartes comme le whist ou le boston.

Les bridgeurs qui, par la pratique ou par la réflexion personnelle, ont adopté des règles de conduite au bridge trouveront dans ce livre si riche, soit une confirmation de ces règles, soit une incitation à les contrôler ou à les corriger, en connaissant mieux les prévisions théoriques.

Le plan de l'ouvrage est simple, il suit les différentes phases d'une partie de bridge: le battage des cartes, la donne, les déclarations, l'entame, les modifications qu'apporte aux probabilités la connaissance du mort. Pour pénétrer sur deux points au moins dans quelques détails suggestifs, mentionnons à titre d'exemple ce que l'on peut tirer du tableau 51: Un résidu de 5 cartes intéressantes a une probabilité de 0,678261 de se répartir sous forme 3 et 2 ou 2 et 3 entre deux mains cachées, une probabilité de 0,282609 de se répartir sous forme 4 et 1 ou 1 et 4, etc. Le tableau 30 concerne la valeur défensive des honneurs, As, Roi, Dame, secs. La probabilité que l'As même ne se fera pas est de 0,167; que l'As seul se fera, 0,1274, que l'As et le Roi seuls se feront, 0,3611, que l'As, le Roi et la Dame se feront tous trois 0,4947 et enfin le nombre moyen des levées faites par ces trois cartes est de 2,334 levées et ainsi de suite s'il existe une quatrième carte...

La grande difficulté d'une théorie mathématique du bridge vient de la phase des déclarations des joueurs lors de l'enchère, car les renseignements fournis sont, comme le relèvent les auteurs, difficilement traduisibles en chiffres, puisque cette appréciation dépendrait pour beaucoup de la psychologie des joueurs (et parfois même de leur fantaisie). Pratiquement, il faut jouer rapidement, c'est même un des principaux intérêts du jeu et il serait vain de vouloir agir au mieux en consultant ce livre au cours d'une partie. L'on ferait comme le débutant qui dansait le tango avec, dans une main, sa danseuse et dans l'autre un croquis indiquant les mouvements que devaient faire chacun de ses pieds; les auteurs ne recommandent nulle-

ment cet usage de leur livre au cours du jeu. Mais le bridge fournit d'amples circonstances où une première intuition peut être trompeuse et c'est un enseignement général que pratiquement les bridgeurs pourront y trouver. Quand faut-il suivre une ligne de jeu de toute sécurité ? Quand faut-il au contraire avoir plus d'audace ? Questions en rapport aussi avec l'état de la marque.

Les bridgeurs trouveront encore du plaisir à résoudre pratiquement les problèmes proposés, plus ou moins compliqués du point de vue théorique, et la lecture de cet ouvrage si suggestif ne nécessite qu'une connaissance élémentaire de l'analyse combinatoire, d'ailleurs rappelée en note, et du calcul des probabilités. Il ne nécessite pas non plus, pour les amateurs de problèmes de calcul des probabilités, d'être grand clerc en matière de bridge.

C'est très probablement la plus fine, en même temps que la plus importante étude consacrée à un jeu de hasard particulier. Avec lui, le calcul des probabilités revient à ses origines, à son berceau pascalien, mais combien fortifié dans ses jugements et combien amplifié par toutes les réflexions consacrées au hasard par les siècles intermédiaires. Les traités d'échecs exposent souvent, et critiquent des parties complètes jouées par des maîtres. Ne serait-il pas possible d'enregistrer une partie de bridge jouée effectivement par des professionnels et de montrer où la ligne de jeu était conforme au calcul des probabilités et où, au contraire, elle s'éloignait de ses conseils.

Bien entendu, ceci n'est pas un reproche, car les savants auteurs de l'ouvrage n'auraient, j'en suis persuadé, aucune peine à montrer le danger ou le manque d'intérêt d'une telle entreprise.

Enfin, félicitons-les d'avoir amené à s'intéresser aux mathématiques une grande catégorie d'esprits perspicaces et passionnés.

Rolin WAVRE (Genève).

Jean PIAGET et Alina SZEMINSKA. — **La Genèse du nombre chez l'enfant.** — Un vol. in-8° de 308 p.; Fr. 6,75; Delachaux et Niestlé, Neuchâtel et Paris, 1941.

Des différentes études de M. J. Piaget, professeur de psychologie à l'Université de Genève, sur la pensée de l'enfant, la genèse du nombre est sans doute celle qui intéresserait le plus un mathématicien. De cet ouvrage si riche en enquêtes multiples, nous ne retiendrons ici que deux points particuliers.

L'auteur, qui est considéré comme un des plus grands experts de la psychologie génétique, souligne les difficultés inhérentes à des analyses de cet ordre, car les mots n'ont pas encore pour les petits enfants entre trois et six ans le sens précis qu'ils acquièrent plus tard. Des doutes peuvent surgir au sujet de la signification des réponses d'un enfant à un questionnaire verbal quelconque. De sorte qu'il faut autant que possible, en maintenant le principe d'une conversation libre avec l'enfant, procéder à d'amples recoupements pour asseoir l'enquête sur une base expérimentale suffisante. Le dialogue doit s'engager à propos de jeux où l'élément action l'emporte sur l'élément verbal. On demandera par exemple à l'enfant d'ordonner dans leur ordre de grandeur les objets d'une certaine collection; on lui fera entrevoir des relations d'inclusion dans des collections d'objets matériels. Au moyen des classes emboîtées on se rendra compte s'il possède

la notion de transitivité des relations antisymétriques, comme disent les logiciens. On déplacera une collection dont le nombre d'objets a été reconnu égal à celui d'une autre, on la cachera même pour voir si le nombre est bien conçu comme un invariant au travers des déplacements ou même des disparitions des collections.

Ce domaine côtoie, comme on le sait, celui de la logique élémentaire. M. Piaget est parti du point de vue que l'arithmétique et la logique sont solidaires l'une de l'autre au début et se développent corrélativement. Mais, nous dit-il, les résultats de ses analyses confirment cette dépendance. A un stade prélogique correspond un stade prénumérique et l'apparition du nombre à quatre ou cinq ans est simultanée de celle des relations d'inclusion, de sériation et d'ordre dans les classes. « Les opérations logiques et arithmétiques nous sont apparues comme un seul système total et psychologiquement naturel, les secondes résultant des premières sous leurs deux aspects complémentaires d'inclusion des classes et de sériation des relations; mais avec élimination de la qualité. »

Les notions de nombre et de classe sont donc appelées à s'éclairer l'une l'autre. M. J. Piaget, au courant des travaux sur la logique mathématique, qui de Russel à nos jours ont abouti à l'impossibilité de séparer radicalement les deux domaines, tend à penser que cette dépendance est une interpénétration radicale des concepts en question et non seulement un synchronisme chez l'enfant dans la prise de conscience des deux sortes de notion. Quant au développement à cet âge de l'idée de nombre entier, il y aurait, si j'ai bien compris, trois stades principaux: une incoordination initiale, les grandeurs ne pouvant être classées mais seulement appréciées en gros; puis une coordination intuitive où le nombre échoue encore en tant que symbole d'opération, enfin, le stade opératoire où le nombre a acquis sa vertu tant dans la coordination que dans l'ordination.

R. Wavre (Genève).

Jean de la Harpe. — **Genèse et mesure du temps.** — Un vol. in-8° de 180 p.; Fr. 5; Delachaux & Niestlé, Neuchâtel et Paris, 1941.

L'auteur est un grand érudit dans le domaine de la philosophie des sciences et un spécialiste de la pensée de Cournot. Dans le livre actuel, il s'attache d'abord à la genèse de l'idée de temps chez l'enfant, telle qu'elle résulte des études antérieures de J. Piaget. Puis il applique la même méthode génétique au temps vécu tel qu'il apparaît à l'adulte dans les données immédiates de sa conscience psychologique. Mais, c'est surtout le passage du temps subjectif individuel, senti, au temps homogène, le même pour tous, qui retient l'attention de l'auteur. Cette objectivation du temps s'appuie à la fois sur des facteurs sociaux et sur le cours des astres. Le temps s'unifie en contact avec les réalités sociales et physiques, et devient un continu à une dimension, sous-tendu pour ainsi dire à tous les phénomènes. Mais, dit l'auteur, contrairement à la croyance commune, on ne peut encore à ce stade passer au temps homogène de la science qui veut qu'une minute le lundi soit en quelque sorte identique à une minute du mardi, au transport près d'un jour à l'autre. Ceci requiert, comme nous le dirions en mathématique, un axiome de la congruence, et c'est ce que l'auteur nomme: axiome de commutabilité. Abandonnant alors l'analyse intuitive de l'idée de temps, J. de la Harpe tente de formuler quelques

axiomes pour dégager les facteurs d'ordre logique impliqués dans l'écoulement temporel, un et universel. Alors l'idée de temps se prête à la mesure et une métrique peut être introduite sur le continu topologique du début. Nous ne dirons rien ici du problème de la mesure de la vitesse d'écoulement du temps au moyen des phénomènes périodiques, astronomiques ou physiques. De la théorie de la relativité l'auteur retient surtout ce qui importe à une vue d'ensemble de son sujet. Il y voit l'introduction de « temps de repérage » pour assurer une compatibilité logico-mathématique à toutes les mesures physiques, en accord d'ailleurs avec la constance de la vitesse de la lumière. Deux philosophes français, MM. L. Brunschwicg et A. Lalande, ont remis à l'auteur chacun une note sur le problème du temps, notes qui terminent le livre. Ils ont tenu à marquer ainsi leur attachement constant pour ce qui se fait en Suisse dans le domaine de la philosophie des sciences. C'est un témoignage précieux d'intérêt dans une Europe hélas! bien morcelée par la guerre.

J'ai cru devoir signaler aux mathématiciens ces deux ouvrages de J. Piaget et de J. de la Harpe, puisqu'ils sont consacrés à la genèse de deux notions sans lesquelles il n'y aurait probablement pas de mathématiques. R. WAVRE (Genève).

F. GONSETH. — **Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des Sciences mathématiques.** 6-9 décembre 1938. Exposés et discussions. — Un vol. in-8° de 209 pages; Leemann frères & Cie, Zurich, 1941.

Du 6 au 9 décembre 1938, des mathématiciens, logiciens et philosophes de divers pays se trouvèrent réunis à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich pour confronter leurs vues sur le problème des fondements et de la méthode des sciences mathématiques. Organisés par M. le Prof. F. GONSETH, de l'Ecole polytechnique, sous les auspices de l'Institut international de Coopération intellectuelle, ces entretiens avaient pour but de « dégager les éléments d'une Théorie de la connaissance conforme à la fois aux besoins du mathématicien d'hier et du mathématicien d'aujourd'hui, à la tradition mathématique et aux expériences inattendues de ces dernières décades », c'est-à-dire de dégager une plate-forme capable de servir de base commune à tous les essais actuels concernant les fondements des mathématiques.

Qu'il nous suffise, pour donner un aperçu sommaire des objets mis en discussion, de reproduire ici la liste des conférences inscrites au programme des *Entretiens de Zurich*:

Sur la doctrine préalable des vérités élémentaires. Introduction, par M. F. GONSETH, Zurich. — Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem, par M. Th. SKOLEM, Oslo. — L'analyse générale et la question des fondements, par M. M. FRÉCHET, Paris. — Die Logik und das Grundlagenproblem, par M. Jan LUKASIEWICZ, Varsovie. — Les controverses sur la théorie des ensembles et la question des fondements, par M. H. LEBESGUE, Paris. — L'axiome du choix et l'hypothèse du continu, par M. V. SIERPINSKI, Varsovie. — Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration, par M. P. BERNAYS, Zurich. — A propos de la discussion sur les fondements des mathématiques, par M. P. FINSLER, Zurich. — Conclusions: Sur le rôle unificateur de l'idée de dialectique, par M. F. GONSETH, président des débats.

Festschrift Rudolf Fueter zur Vollendung seines sechzigsten Altersjahres, 30. VI. 1940. (Beiblatt zur Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Nr. 32, Jahrg. 85.) — Un vol. in-8° de 231 pages, avec un portrait; Fr. 5; en dépôt au Séminaire de mathématiques de l'Université de Zurich, 1940.

Les collègues, les amis et les élèves de M. R. Fueter n'ont pas voulu laisser passer le soixantième anniversaire du savant professeur sans lui offrir un témoignage de leur sympathie, de leur estime et de leur reconnaissance. Ce témoignage se présente sous la forme d'un beau volume dans lequel ont été réunis de nombreux mémoires appartenant principalement à la Théorie des nombres, à l'Algèbre et à la Théorie des fonctions, branches auxquelles se rapportent la plupart des travaux de l'éminent géomètre qui présida le Congrès international des Mathématiciens tenu à Zurich en 1932.

La simple liste des noms des collaborateurs donne une idée de l'intérêt scientifique de cet ouvrage:

H. Behnke u. Stein (Munster, Westf.). — L. Bieberbach (Berlin). — H. Brandt (Halle a.d.S.). — J. J. Burckhardt (Zurich). — C. Carathéodory (Munich). — T. Carleman (Djursholm, Stockholm). — Elie Cartan (Paris). — P. Finsler (Zurich). — F. Gonseth (Zurich). — M. Gut (Zurich). — E. Hecke (Hambourg). — H. Hopf (Zurich). — H. Jecklin (Zurich). — H. Lebesgue (Paris). — A. Kienast (Zurich). — P. Montel (Paris). — L. J. Mordell (Manchester). — O. Ore (New Haven, Conn.). — M. Plancherel (Zurich). — W. Scherrer (Berne). — Fr. Severi (Rome). — A. Speiser (Zurich). — E. G. Togliatti (Gênes). — E. Trost (Zurich). — N. Tschebotarow (Kazan). — H. S. Vandiver (Austin, Texas). — R. Wavre (Genève).

Le Comité d'organisation était présidé par M. le Prof. A. Speiser, de l'Université de Zurich. H. Fehr.

Eduard Fueter. — **Geschichte der exakten Wissenschaften in der Schweizerischen Aufklärung** (1680-1780). — Un vol. in-8° de 336 p., relié; Sauerländer & Cie, Aarau et Leipzig, 1941.

Cet ouvrage traite de l'Histoire des Sciences en Suisse pendant la période de 1680 à 1780. On sait qu'au cours du XVIIIe siècle la recherche scientifique prit un magnifique essor dans tous les pays et que les contributions des savants suisses furent très importantes dans tous les domaines. Il nous suffira de citer quelques noms pour les sciences mathématiques: les Bernoulli, Léonard Euler, Gabriel Cramer, G.-L. Lesage, Joh. Lambert, Louis Bertrand, Simon L'Huillier.

Par ses travaux antérieurs, ses recherches sur Micheli Du Crêt et sa collaboration à l'ouvrage *Pionniers suisses de la Science*, M. Ed. Fueter, neveu de l'éminent mathématicien dont nous venons de rappeler le jubilé, était bien qualifié pour entreprendre un travail aussi vaste. Dans sa Préface il estime qu'il ne s'agit que d'un « Essai » et qu'il y aura lieu de reprendre séparément les différentes branches ou certaines époques. La tâche est grandement facilitée par la riche documentation bibliographique reproduite à la fin du volume. H. Fehr.

W. Lietzmann und U. Graf. — **Mathematik in Erziehung und Unterricht.** Band I: *Ziel und Weg.* — Un vol. in-8° de 144 pages; relié, RM. 5,50 (réduction de 25% pour l'étranger); Quelle u. Meyer, Leipzig 1941.

Au cours de ces dernières années l'enseignement primaire, secondaire et

supérieur allemand a subi d'importantes transformations. Le gouvernement a procédé à une refonte complète de l'enseignement secondaire tendant à uniformiser le système scolaire [1] en réduisant les divers types d'écoles jusqu'alors admis. La réforme porte aussi sur les plans d'études et la méthode de travail.

Mais les programmes ne valent que ce que valent les maîtres. Le corps enseignant doit être renseigné sur le but que poursuit la réforme et l'esprit dans lequel les nouveaux plans doivent être interprêtés. Après avoir collaboré directement aux travaux de la réorganisation de l'enseignement secondaire, MM. Lietzmann et Graf étaient tout particulièrement qualifiés pour entreprendre cette tâche dans le domaine des mathématiques. Leur ouvrage comprendra deux parties. Il constitue en quelque sorte une méthodologie mathématique adaptée aux conditions nouvelles.

Ce premier volume contient des considérations générales sur les buts de l'enseignement mathématique dans les divers types d'écoles, sur la méthode de travail, l'emploi des manuels et des modèles, ainsi que sur la terminologie mathématique. La seconde partie sera consacrée aux plans d'études.

Nous signalons cet ouvrage à l'attention de tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'enseignement des mathématiques dans les établissements secondaires. H. FEHR.

E. A. WEISS. — **Punktreihengeometrie.** — Un vol. in-8° de VIII-232 pages avec 29 figures; relié, RM. 14; B. G. Teubner, Leipzig 1939.

Cet ouvrage reproduit, avec quelques développements, les leçons sur les ponctuelles linéaires professées par l'auteur à l'Université de Bonn. Envisagées d'abord au point de vue synthétique par Reye, les ponctuelles linéaires ont été étudiées ensuite par voie analytique notamment par MM. Stahl, Timerding, Guradze et Weiss.

L'auteur expose successivement la théorie des ponctuelles linéaires sur une droite, dans le plan, dans l'espace et dans l'espace non euclidien, en débutant chaque fois par la méthode analytique. Dans son Introduction à la Géométrie linéaire publiée en 1935 (v. *L'Ens. mathém.*, t. 34, p. 126-7), il a montré le rôle utile que joue l'étude des multiplicités quadratiques dans un espace à cinq dimensions, selon Felix Klein. Ici encore cette méthode joue un rôle fondamental.

Ce nouvel ouvrage de M. Weiss constitue une importante contribution à la Géométrie projective dans ses développements modernes. H. F.

L. HEFFTER. — **Grundlagen und analytischer Aufbau der projektiven, euklidischen, nichteuklidischen Geometrie.** — Un vol. in-8° de 199 p. avec 66 fig.; relié, RM. 12; B. G. Teubner, Leipzig, 1940.

Dans cette étude des fondements de la Géométrie projective établis par la méthode analytique, l'auteur procède du général au particulier. Son exposé repose sur la considération des sous-groupes du groupe projectif

[1] Voir les instructions officielles publiées sous le titre *Erziehung und Unterricht in der höheren Schule.* Amtliche Ausgabe des Reichs- und Preussischen Ministeriums für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung. (Un vol. broché de 265 pages; Verlag Weidmann, Berlin 1938.)

et sur la classification des figures géométriques fondamentales. Après avoir examiné les axiomes qui sont à la base de la Géométrie, il montre comment de la Géométrie projective on passe, d'une part, à la Géométrie affine et à la Géométrie « équiforme » et, d'autre part, aux Géométries non-euclidiennes, chacun des domaines étant envisagé comme un cas particulier du précédent.

Présenté d'une manière très claire, le livre de M. Heffter ne manquera pas d'intéresser tous ceux qui s'occupent des fondements de la Géométrie.

H. G. Forder. — **The Calculus of Extension,** including examples by R. W. Genese. — Un vol. in-8° de xvi-490 pages; relié, 30 sh.; The University Press, Cambridge 1941.

C'est pour la première fois, croyons-nous, que le Calcul géométrique de Grassmann est présenté aux milieux scientifiques de langue anglaise sous la forme d'un traité de quelque étendue. Dans la patrie de Hamilton on s'était attaché de préférence à la Théorie des quaternions.

La première édition de l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann (science des grandeurs extensives) remonte à l'année 1844. La terminologie et les algorithmes introduits par l'auteur en rendent la lecture difficile. Ce n'est que peu à peu que, malgré leur grande portée, les travaux de Grassmann sont pris en considération par ses contemporains. Au nombre des disciples il convient de citer en première ligne le professeur Mehmke qui a largement contribué à mettre en lumière les idées du savant géomètre de Stettin.

L'exposé de M. Forder constitue une excellente mise au point du Calcul géométrique d'après Grassmann et ses continuateurs; il tient compte des travaux les plus récents et fournit de nombreux problèmes et exercices d'un réel intérêt. Quant à la terminologie adoptée par l'auteur, nous ne connaissons pas suffisamment la tradition anglaise pour nous permettre de formuler un jugement.

Extrait de la table des matières: Plane Geometry. — Geometry in Space. — Applications to Projective Geometry. — Rotors in Space, the Screw, and the Linear Complex. — Differentiation and Motion. — Projective Transformations on the Line, Plane, and Space. — The General Theory. — Application to systems of Linear Equations and Determinants. — Transformations and Square Matrices with Applications to Central Quadrics. — General Theory of Inner Products. — Circles. — Oriented Circles and Systems of Circles. — The General Theory of Matrices. — Quadric Spreads in Spreads of any Step. — Algebraic Products. — Index of subjects. — Index of names.

H. F.

Fr. Emde. — **Tafeln elementarer Funktionen.** Tables of elementary Functions. — Un vol. gr. in-8° de xii + 181 pages avec 83 figures; relié toile; RM. 12 (réduction de 25% pour l'étranger); B. G. Teubner, Leipzig, 1940.

La première édition de ces tables remonte à l'année 1909. A l'occasion de la troisième édition, entièrement remaniée et augmentée, l'ouvrage a été divisé en deux volumes, en vente séparément. Les tables concernant les transcendantes classiques de l'Analyse ont été publiées en 1938 (voir *L'Ens. mathém.*, t. 37, p. 241). Le présent volume est consacré aux fonctions usuelles élémentaires. Il contient de nombreuses tables numériques accom-

pagnées de formules et de représentations graphiques. Adaptées aux besoins actuels et disposées d'une manière très pratique, ces nouvelles tables seront favorablement accueillies par tous les calculateurs, mathématiciens, physiciens ou techniciens.

Les titres et le texte sont donnés en allemand et en anglais.

Voici un extrait de la table des matières: « Potenzen. — Faktorentafeln. — Hilfstafeln für das Rechnen mit komplexen Zahlen. — Quadratische Gleichungen. — Kubische Gleichungen. — Gleichungen 4. Grades. — Winkel *a*) in Graden; *b*) in Rechten; *c*) in Radianten. — Besondere Funktionen. — Transzendente Gleichungen. — Tschebyschewsche Polynome. — Näherungsrechnungen mit Polynomen. — Einige Bemerkungen über Zahlenrechnungen. »

Le volume se termine par une liste bibliographique très complète des tables et ouvrages utiles aux calculateurs. H. Fehr.

E. Kamke. — **Differentialgleichungen.** Lösungsmethoden und Lösungen. Band I: *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (Mathematik und ihre Anwendungen, B. 18). — Un vol. in-8° de xxvi-642 pages avec 60 figures; relié, RM. 37; Akademische Verlagsgesellschaft Becker u. Erler, Leipzig 1942.

Lorsqu'un physicien ou un technicien va consulter un mathématicien, c'est généralement au sujet d'une équation différentielle. Ce n'est pas dire que parfois le mathématicien ne se trouve lui-même dans l'embarras devant les difficultés que présentent certains problèmes. La nature a semé des difficultés non seulement sur les chemins des physiciens et des ingénieurs mais aussi sur ceux des analystes. Elles ont précisément été la source de grands progrès.

Les uns et les autres sauront gré à M. Kamke, professeur à l'Université de Tubingue, d'avoir entrepris la publication d'un recueil comprenant les principaux types d'équations différentielles que l'on rencontre dans les mathématiques pures et appliquées.

Ce premier volume est consacré aux *équations différentielles ordinaires.* Dans la première partie l'auteur expose les méthodes de résolution et les propriétés des solutions des équations des divers ordres et des systèmes d'équations, ainsi que les procédés numériques, graphiques et mécaniques. Puis vient, dans la seconde partie, l'étude des problèmes relatifs aux conditions aux limites. La troisième partie contient près de 1.500 équations différentielles avec leur solution. Groupées méthodiquement, elles sont accompagnées d'indications quant à la marche à suivre et de références bibliographiques permettant de recourir aux traités classiques et aux mémoires originaux.

Ce recueil sera consulté avec profit par tous ceux qui à un titre quelconque s'occupent de la résolution d'équations différentielles.

Hugo Sirk. — **Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker.** Eine Einführung in die Anwendungen der höheren Mathematik. — Un vol. gr. in-8° de 280 pages, avec 126 fig.; RM. 12 (réduction de 25% pour l'étranger); Theodor Steinkopff, Dresde et Leipzig, 1941.

Cet Ouvrage est destiné aux étudiants en sciences physiques et plus particulièrement aux étudiants en chimie. Il se différencie des traités de

mathématiques générales non seulement par le choix des matières, mais aussi par la méthode d'exposition. Tenant compte de la préparation mathématique des étudiants auxquels il s'adresse, l'auteur a dû sacrifier les difficultés d'ordre théorique en faisant appel à l'intuition et à des exemples concrets et il a renoncé à des théories générales qui ne sont pas d'une utilité immédiate pour le chimiste. Dès le début il s'efforce de développer la compréhension mathématique en s'appuyant constamment sur des problèmes empruntés aux sciences physiques et chimiques.

Le livre est divisé en trois parties: I. Fonctions d'une variable. Calcul différentiel et intégral (p. 1 à 167). — II. Fonctions de plusieurs variables (p. 168 à 192). — III. Equations différentielles (p. 193 à 213). — Il se termine par un Appendice contenant un résumé des principales notions de mathématiques élémentaires.

Ces leçons, qui correspondent à l'enseignement que professe M. Hugo Sirk à l'Université de Vienne, seront consultées avec un réel profit par les étudiants. H. FEHR.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Federico AMODEO. — **Origen y Desarrollo de la Geometria Proyectiva.** Traducción directa del Italiano por Nicolas y Jose BABINI. (Facultad de Ciencias Matemáticas. Publicaciones del Instituto de Matemáticas). — Un vol. in-8° de 219 pages; Rosario, República Argentina, 1939.

Raymond Clare ARCHIBALD. — **Outline of the History of Mathematics.** Fifth edition revised and enlarged. — Un fasc. in-8° de 75 p.; 75 cents; The Mathematical Association of America, Inc., Oberlin, Ohio, 1941.

W. BLASCHKE. — **Mathematik und Leben.** — Une brochure in-8° de 14 p. (Hamburger mathem. Einzelschriften, Heft 27); RM. 1; pour l'étranger RM. 0,75; B. G. Teubner, Leipzig, 1940.

Cet opuscule reproduit la conférence sur *Les mathématiques et la vie* faite le 3 mars 1940 à l'occasion du 250me anniversaire de la Société mathématique de Hambourg. S'adressant au grand public, M. Blaschke doit se borner à des considérations générales sur le but et la portée des mathématiques. Il rappelle, entre autres, quelle a été l'opinion de quelques personnalités célèbres entièrement fermées à toute compréhension des mathématiques (saint Augustin, Gœthe, Schopenhauer, etc.) et termine par deux aphorismes empruntés à G. C. Lichtenberg, professeur de mathématiques et de physique, décédé à Gœttingue en 1799.

Leif JOHNSEN.— **Dynamique générale des systèmes non-holonomes.** — Un fasc. gr. in-8° de 75 pages; Jacob Dybwad, Oslo, 1941.

Préface. — Les méthodes de la dynamique non-holonome. — Les principes fondamentaux de la dynamique. — Pseudo-coordonnées indépen-