Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES

Autor: Turrière, E.

Kapitel: Courbes définies par une relation entre OT et OM.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515775

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 26.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elle est réduite au type classique

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = k\xi^m$$

$$m = -\frac{4N}{2N+1}$$

N étant entier (N = 1). Le changement de variable

$$\xi = At^{\frac{2}{m+2}}, \qquad A^{m+2} = -\frac{(m+2)^2}{4k},$$

$$\eta = \frac{1}{u}\frac{du}{d\xi},$$

la transforme en l'équation de BESSEL:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2n+1}{t}\frac{du}{dt} + u = 0 \;;$$

on est dans le cas d'intégration des fonctions de BESSEL d'indice $n = -\frac{3}{2}$,

$$k = -1, \qquad A = \frac{1}{27}.$$

4. — A signaler aussi, un cas d'intégration

$$y^m = \operatorname{tg} V, \qquad m = \text{const.}$$

par séparation des variables:

$$r^{m-1}\,dr = \sin^{-m}\theta \cdot d\theta .$$

Courbes définies par une relation entre OT et OM.

5. — Soit T la trace sur l'axe Ox de la tangente en M à une courbe. La condition

$$\lambda = \mathrm{OT} = f(r),$$

entre la coordonnée axiale $\lambda = x - y\frac{dx}{dy}$ et le rayon vecteur $r = \mathrm{OM}$, devient

$$r^2\frac{d\theta}{dy} = f(r),$$

$$\frac{dx}{x-f} = \frac{dr}{r - \frac{x}{r}f}.$$

En posant

$$x = \frac{r^2}{f} - \frac{1}{z} ,$$

l'équation prend la forme:

$$\frac{dz}{dr} = r\left(\frac{r^2}{f^2} - 1\right) \cdot z^2 (z + \mathrm{P}) ,$$

$$\mathrm{P} = \frac{rf' - 3f}{r^2 - f^2} , \qquad f' = \frac{df}{dr} .$$

Il y a séparation des variables, pour P constant.

Pour $\mathrm{P} = 0$, il suffit de prendre $f = r^3$:

$$\frac{1}{z^2} = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2a ,$$

d'où la courbe:

$$r^2 \sin^2 \theta = 2(a - \cos \theta) ,$$

$$y^2 = 2(a - \cos \theta) ,$$

circulaire, du sixième degré.

Le cas de P constant correspond aux intégrales $f(r)$ d'une équation de Riccati

$$r \frac{df}{dr} = 3f + \mathrm{P}(r^2 - f^2) .$$

En posant alors

$$r = \frac{1}{\mathrm{PX}} , \qquad f = \frac{1}{\mathrm{P}} \cdot \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}^3} ,$$

l'équation de Riccati prend la forme canonique

$$\boxed{\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = -1 + \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^4} .}$$

Il y a lieu d'observer que le changement de variables

$$\mathrm{Y} = -i\mathrm{Y}_1 , \qquad \mathrm{X} = i\mathrm{X}_1 ,$$

lui donne la forme

$$\frac{d\mathrm{Y}_1}{d\mathrm{X}_1} = 1 + \frac{\mathrm{Y}_1^2}{\mathrm{X}_1^4} ,$$

obtenue plus haut pour l'équation correspondante de séparation des variables dans le problème de l'isochrone paracentrique; la transformation

$$X_1 = \frac{1}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}, \qquad Y_1 = \frac{1}{9}\eta,$$

donne l'équation

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \xi^{-\frac{4}{3}},$$

intégrable par les fonctions de BESSEL d'indice $-\frac{3}{2}$.

6. — Un autre cas d'intégration est celui des courbes définies par la condition:

$$OT = k \cdot OM .$$

L'équation correspondante

$$\frac{dr}{r - kx} = \frac{dx}{x - kr},$$

est homogène. Elle devient

$$k\frac{dr}{r} = \frac{1 - k\cos\theta}{\sin\theta}d\theta .$$

D'où:

$$y = \operatorname{tang}^{\frac{1}{k}}\frac{\theta}{2},$$

$$r\sin\theta = \operatorname{tang}^{\frac{1}{k}}\frac{\theta}{2},$$

$$2x = y(y^{-k} - y^k) .$$

Ces courbes sont identiques aux *images d'Aoust des courbes ordinaires de poursuite.*