courbe atuptique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

9. — Comme courbes se rattachant à cette équation, il y a lieu de citer les deux suivantes:

I. Soient N et T′ les traces respectives sur les axes Ox et Oy de la normale MN et de la tangente MTT′ d'une courbe (C).

La condition NT′ = 1 caractérise des courbes (C) telles que

$$r = \cos \alpha \ ,$$
$$\mathrm{MN} = \sin \theta \ , \qquad \mathrm{ON} = \sin \widehat{\mathrm{OMN}} \ ;$$

le cercle circonscrit au triangle OMN a pour diamètre NT′ = 1.

L'équation des courbes est:

$$\varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2 = \cos^2 \alpha$$

ϖ étant la distance du pôle O à la tangente d'inclinaison α sur Ox.

II. L'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \ ,$$

est équivalente à

$$r^2 = \operatorname{tg} \alpha \ .$$

La courbe atuptique.

10. — J. Porro a donné le nom de courbe *atuptique* à l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2 + y^2) + 2ay\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{y(x^2 + y^2) + 2ax\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} \ .$$

Ce serait la forme théoriquement assignée aux aubes destinées aux moteurs hydrauliques [1].

---

[1] J. Porro, *Essai sur la théorie des moteurs hydrauliques.* Turin, 1844, p. 29.
Théorie générale des moteurs hydrauliques. *C. R.*, 1852, t. XXXIV, p. 172-174.
H. Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, 1897, p. 66.
G. Loria, *Curve piane speciali*, I, 1930, p. 118.
Le nom dérive de τύπτω = je frappe de près (par opposition à βάλλω). C'est la courbe *sans choc*.

L'équation différentielle n'a pu être intégrée. Donnée sans démonstration par PORRO dans sa communication de 1852, elle a été relevée d'après cette communication. Mais si l'on se reporte à l'opuscule de 1844, on constatera l'existence de deux erreurs dans les formules trigonométriques (de la page 28) qui faussent entièrement l'équation indiquée [1].

11. — Etudions l'équation différentielle telle qu'elle a été considérée jusqu'à présent. En coordonnées polaires elle prend la forme

$$d(r^2 \cos 2\theta) = 2c\sqrt{r^2 - a^2}\, d\theta$$

où $c = 2a$.

Pour $c = 0$, cette équation représente des hyperboles équilatères. Pour $a = 0$, $c \neq 0$, l'équation

$$d(r^2 \cos 2\theta) = 2cr \cdot d\theta$$

est linéaire en r et admet l'intégrale générale

$$r\sqrt{\cos 2\theta} = c\int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} + \text{const.}$$

dépendant d'une intégrale elliptique (du cas lemniscatique $g_3 = 0$).

Dans le cas général, en posant

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{z^2}\,,$$

on met l'équation sous la forme

$$\cos 2\theta \cdot \frac{dz}{d\theta} + a^2 \sin 2\theta \cdot z^3 + cz^2 + z \sin 2\theta = 0\,.$$

Sans restriction de la généralité de la question, la constante a peut être prise égale à l'unité. La réduction à la forme type

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 + J\,,$$

---

[1] Voir à ce sujet ma note « Sur diverses courbes planes » des *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, 1937, t. XXII, p. 93-129, 145-150.

se fait par les formules

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \mathrm{M} \;, \qquad z = \mathrm{UZ} + \mathrm{V} \;,$$

avec

$$\mathrm{U}^2 = \cos 2\theta \cdot \operatorname{tang}^{\frac{c^2}{3}} 2\theta \;, \qquad \mathrm{V} = -\frac{c}{3} \cdot \frac{1}{\sin 2\theta} \;,$$

$$\mathrm{M} = -\mathrm{U}^2 \operatorname{tang} 2\theta \;,$$

$$27\,\mathrm{U}^3 \sin^3 2\theta \cdot \frac{\mathrm{J}}{c} = 2(c^2 + 9) - 27 \sin^2 2\theta \;.$$

12. — L'équation ayant une intégrale évidente ($z = 0$) peut être réduite à la forme canonique

$$\frac{d\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{Z}^3 + \mathrm{P} \cdot \mathrm{Z}^2 \;;$$

il suffit de poser pour le cas $c = 2$, $a = 1$ de la courbe de Porro:

$$z = \sqrt{\cos 2\theta} \cdot \mathrm{Z} \;,$$

$$\cos 2\theta = 2\mathrm{X} \;,$$

$$\mathrm{P} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{X}(1 - 4\mathrm{X}^2)}} \;.$$

13. — Les trajectoires orthogonales des courbes atuptiques, intégrales de la même équation différentielle pour une valeur donnée de a, ont pour équation

$$xy + c \int \sqrt{r^2 - a^2} \cdot \frac{dr}{r} = 0 \;;$$

elles sont déterminées par les formules paramétriques:

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} \;,$$

$$\sin 2\theta = 2\frac{c}{a} \cos^2 \varphi (\varphi - \operatorname{tang} \varphi) + \mathrm{A} \cos^2 \varphi \;,$$

avec une constante arbitraire A.