II. RÉDUCTION AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'équation (5) est donc différentielle ordinaire du premier ordre par rapport à la fonction inconnue p de la variable indépendante y, en traitant x comme une constante. L'intégrale générale de l'équation (5) va s'écrire, par conséquent, de la manière suivante:

$$f(x, y, p, \mathrm{X}) = 0 , \tag{7}$$

X désignant une fonction arbitraire de x, qui s'introduit, au lieu d'une constante arbitraire d'intégration.

L'équation obtenue (7) est encore différentielle ordinaire du premier ordre par rapport à la fonction inconnue z, car on a

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} ,$$

la variable y est, à présent, à considérer comme une valeur constante. Supposons que l'on obtienne, en résolvant l'équation (7) par rapport à p:

$$p = \theta(x, \mathrm{X}, y) . \tag{8}$$

Grâce à l'hypothèse introduite par rapport à y, l'équation (8) donne, par quadrature, l'intégrale générale de l'équation (3)

$$z = \int \theta(x, \mathrm{X}, y)\, \partial x + \mathrm{Y} ,$$

où Y est la seconde fonction arbitraire qui ne dépend que de y.

La seconde équation (6) va s'intégrer d'une manière analogue; et l'intégrale générale de l'équation (4) impliquera deux fonctions arbitraires, dont la première ne contient que y et la seconde sera une fonction de la variable x.

II. — Réduction aux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Considérons, d'abord, les équations de la forme suivante:

$$\mathrm{F}(x, y, p, r, s) = 0 , \tag{1}$$

$$\Phi(x, y, q, s, t) = 0 . \tag{2}$$

Chacune de ces équations se met immédiatement sous la forme d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. En effet, on les écrit aisément de la manière suivante:

$$F\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0 , \tag{3}$$

$$\Phi\left(x, y, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0 . \tag{4}$$

Un cas très simple se présente, par exemple, si les équations données (1) et (2) sont respectivement linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre. Les équations (3) et (4) sont alors linéaires respectivement par rapport aux dérivées $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$, ou bien par rapport à $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}$.

Si l'on suppose, par exemple, que l'équation (3) soit linéaire, son intégrale générale va devenir:

$$p = u(x, y) + \varphi\left[v(x, y)\right] , \tag{5}$$

φ désignant une fonction arbitraire et u, v admettant des valeurs bien déterminées.

L'équation (5) produit l'intégrale générale requise, au moyen d'une quadrature partielle par rapport à la variable x:

$$z = \int \left\{ u(x, y) + \varphi\left[v(x, y)\right]\right\} \partial x + Y ,$$

Y désignant une fonction arbitraire de la variable indépendante y.

On trouve, chez E. Goursat, deux autres cas d'équations qui jouissent des propriétés analogues et se présentent sous les formes suivantes:

$$F\left(x, z, p, r, \frac{s}{q}\right) = 0 , \tag{6}$$

$$\Phi\left(y, z, q, \frac{s}{p}, t\right) = 0 . \tag{7}$$

En cherchant la solution de l'équation (6) sous la forme

$$p = \mu(x, z) ,$$

on transforme l'équation (6) en une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport aux dérivées $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial z}$, à savoir:

$$F\left(x, z, \mu, \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\mu, \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = 0 .$$

Quant à l'équation (7), en y posant

$$q = \lambda(y, z) ,$$

elle va devenir une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ et à $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$:

$$\Phi\left(y, z, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\lambda\right) = 0 .$$

III. — Réduction aux équations représentant des dérivées exactes.

Considérons, par exemple, l'équation bien connue d'Ampère [1]:

$$zs + \frac{z}{q^2}t + pq = 0 . \qquad (1)$$

Elle s'écrit aisément sous la forme évidente:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(zp - \frac{z}{q}\right) + 1 = 0 .$$

Intégrant cette dernière équation, on obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre:

$$zp - \frac{z}{q} + y = X , \qquad (2)$$

où X désigne une fonction arbitraire de la variable x.

Il serait avantageux, pour intégrer l'équation (2), d'y introduire la nouvelle fonction inconnue $z_1 = z^2$. L'équation (2) va devenir

$$p_1 - \frac{4z_1}{q_1} + 2y = 2X ,$$

[1] G. V. Imschenetsky, *Etude sur les Méthodes d'Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* Paris, 1872, p. 149 (n° 143).