Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODES IMMÉDIATES D'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

Autor: Saltykow, N.

Kapitel: IV. — Réduction d'équations aux formes intégrables PAR-GROUPEMENT DES TERMES.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515778

Y désignant une fonction arbitraire de la variable y. Si l'on y introduit, au lieu de z, la nouvelle fonction inconnue $u = e^z$, cette dernière équation devient ordinaire du type eulérien:

$$\frac{du}{dy} = u^2 + \mathrm{Y}u - 1 .$$

En y remplaçant la fonction arbitraire Y par la formule

$$\mathrm{Y} \equiv \frac{\theta' + 1}{\theta} - \theta ,$$

θ désignant la nouvelle fonction arbitraire de y, l'équation considérée admettra la solution particulière θ.

Cela étant, l'intégrale générale de l'équation (6) de M. Gau sera définie par l'ensemble des deux équations suivantes:

$$e^z = \theta - \frac{\mathrm{Y}'}{\mathrm{X} + \mathrm{Y}} ,$$

$$\mathrm{Y} = -\int e^{\int\left(\frac{\theta'+1}{\theta} + \theta\right)dy} dy ,$$

θ et X désignant deux fonctions arbitraires respectivement de y et de x.

IV. — Réduction d'équations aux formes intégrables par groupement des termes.

Il s'agit, dans les lignes qui vont suivre, de transformer les équations données aux dérivées partielles du second ordre en d'autres équations qui soient intégrables, en groupant d'une manière convenable les termes d'équations données.

Pour expliquer l'idée de ce procédé, intégrons, d'abord, l'équation classique de la corde vibrante:

$$r - a^2 t = 0 , \tag{1}$$

a désignant une constante arbitraire.

Ajoutons et retranchons le terme as au premier membre de l'équation étudiée (1). Elle va immédiatement prendre l'une des deux formes suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial x}(p \pm aq) \mp a\frac{\partial}{\partial y}(p \pm aq) = 0 \ ,$$

correspondant l'une aux signes supérieurs, et l'autre à ceux qui sont inférieurs. Chacune des deux équations obtenues est linéaire aux dérivées partielles du premier ordre par rapport au binôme $p \pm aq$, considéré comme nouvelle fonction inconnue.

Cela étant, on mettra leurs intégrales générales respectivement sous les formes suivantes:

$$\left.\begin{aligned} p + aq &= 2af'(y + ax) \ , \\ p - aq &= 2a\varphi'(y - ax) \ , \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

f' et φ' désignant les dérivées des fonctions arbitraires de leurs arguments; quant au facteur constant $2a$, on l'introduit pour simplifier le calcul qui va suivre.

Il suffit de l'une des deux équations intégrales obtenues (2) pour achever l'intégration de l'équation étudiée (1). En effet, chacune d'elles est linéaire aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue z.

En intégrant, par exemple, la première équation (2), on obtient l'intégrale générale requise:

$$z = f(y + ax) + \psi(y - ax) \ ,$$

f et ψ étant deux fonctions arbitraires de leurs arguments.

Or, comme les deux équations (2) sont compatibles, définissant les dérivées p et q de la même fonction z, cette dernière pourrait être définie, d'une autre manière encore, au moyen de l'intégration de la différentielle totale correspondante: $dz = pdx + qdy$.

Comme second exemple citons l'équation classique d'Euler

$$r - t + \frac{2p}{x} = 0 \ . \qquad (3)$$

Il est aisé, en groupant les termes de cette dernière équation, de l'écrire de la manière suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p + q + \frac{z}{x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p + q + \frac{z}{x}\right) + \frac{1}{x}\left(p + q + \frac{z}{x}\right) = 0 \ .$$

Celle-ci étant linéaire aux dérivées partielles du premier ordre du trinôme $p + q + \frac{z}{x}$, considéré comme nouvelle fonction inconnue, l'intégrale générale, dans cette dernière hypothèse, devient:

$$p + q + \frac{z}{x} = \frac{2}{x} f'(x + y) ,$$

f' désignant une fonction arbitraire.

Or, l'équation obtenue est, à son tour, linéaire aux dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue z. Son intégrale générale va définir celle de l'équation d'Euler (3), sous la forme suivante:

$$z = \frac{1}{x}\left[f(x + y) + \varphi(x - y)\right] ,$$

φ étant la seconde fonction inconnue.

Un nouvel exemple est emprunté aux récentes recherches de la théorie des probabilités, où l'on considère l'équation:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{a'^2}{a}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'}\right)\frac{\partial f}{\partial t} = 0 , \tag{4}$$

a' et a'' désignant respectivement la première et la seconde dérivée de la fonction donnée $a(t)$, prises par rapport à t.

Les termes de l'équation écrite peuvent être groupés de deux manières différentes, tout étant mis en une formule:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t} \pm i\frac{a'}{a}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \mp i\frac{a'}{a}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial t} \pm i\frac{a'}{a}\frac{\partial f}{\partial y}\right) +$$
$$+ \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial t} \pm i\frac{a'}{a}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 .$$

Par conséquent, l'intégration de l'équation (4) revient à celle d'un double système:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} \mp i\frac{a'}{a}\frac{\partial f}{\partial y} &= u , \\ \frac{\partial u}{\partial t} \mp i\frac{a'}{a}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{a'}{a} - \frac{a''}{a'}\right)u &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

L'intégration de chacune des équations de la seconde ligne (5) produit deux valeurs distinctes u_1 et u_2 de la fonction u, correspondant respectivement aux signes supérieur et inférieur dans l'équation considérée:

$$u_1 = 2i\frac{a'}{a}\Phi'(y + i\log a) \ , \quad u_2 = -2i\frac{a'}{a}\Psi'(y - i\log a) \ ,$$

Φ' et Ψ' désignant deux fonctions arbitraires, les coefficients $2i$ et $-2i$ y étant introduits pour faciliter le calcul qui va suivre.

Cela étant, la fonction f est définie par l'ensemble des deux équations, en involution, aux dérivées partielles du premier ordre,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{a'}{a}\frac{\partial f}{\partial y} = 2i\frac{a'}{a}\Phi'(y + i\log a) \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - i\frac{a'}{a}\frac{\partial f}{\partial y} = -2i\frac{a'}{a}\Psi'(y - i\log a) \ .$$

Il en résulte immédiatement, par une quadrature, l'intégrale générale requise de l'équation (4) sous la forme très simple:

$$f = \Phi(y + i\log a) + \Psi(y - i\log a) \ .$$

Revenons à présent à deux autres équations dont on a fait mention plus haut, dans les dernières lignes de l'introduction, et que G. Darboux intègre par la méthode de Monge-Ampère.

Quant à la première de ces équations, celle des surfaces réglées, à plan directeur normal à l'axe des cotes,

$$q^2r - 2pq\,s + p^2t = 0 \ , \tag{6}$$

elle peut être écrite de la manière suivante:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{p}{q}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{p}{q}\right) \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Il s'en suit, donc, la relation:

$$\frac{p}{q} = \varphi(z)$$

φ désignant une fonction arbitraire de z.

En multipliant la dernière relation par q, on obtient une équation linéaire, dont l'intégrale générale se présente sous la forme

$$y + x\varphi(z) = \psi(z) ,$$

ψ désignant la seconde fonction arbitraire. C'est l'intégrale générale de l'équation donnée (6).

Il est opportun de faire, à cette occasion, une remarque sur les surfaces réglées, dont le plan directeur occupe une position arbitraire quelconque dans l'espace. L'équation aux dérivées partielles correspondante devient alors:

$$(B + Cq)^2 r - 2(A + Cp)(B + Cq)s + (A + Cp)^2 t = 0 , \qquad (7)$$

les coefficients A, B et C étant constants.

En introduisant la nouvelle fonction inconnue v qui soit liée, avec l'ancienne, par la relation

$$v = Ax + By + Cz ,$$

l'équation (7) transformée devient:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \delta y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 v}{\delta y^2} = 0 .$$

Elle admet, donc, la forme de l'équation (6).

Enfin, si le plan directeur est parallèle à l'axe des z, l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées va devenir

$$B^2 r - 2ABs + A^2 t = 0 , \qquad (8)$$

A et B représentant des coefficients constants.

L'équation (8) peut être écrite

$$B \frac{\partial}{\partial x}(Bp - Aq) - A \frac{\partial}{\partial y}(Bp - Aq) = 0 ,$$

et s'intègre immédiatement par l'une des méthodes suivantes. Il est aisé, d'abord, de considérer cette dernière équation comme linéaire aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à la nouvelle fonction inconnue $Bp - Aq$.

Or, d'un autre point de vue, l'équation considérée est réductible à un système de Charpit [1]. Il s'ensuit l'intégrale générale

$$\mathrm{B}z = xf(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y) + \varphi(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y) \ ,$$

où f et φ représentent deux fonctions arbitraires.

Passons, enfin, à la quatrième équation, celle de la théorie mécanique de la chaleur, figurant chez Darboux [2]:

$$rt - s^2 + a^2 = 0 \ , \tag{9}$$

a étant un coefficient constant; elle peut être mise sous la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(p \pm ay) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(q \mp ax) - \frac{\partial}{\partial y}(p \pm ay)\frac{\partial}{\partial x}(q \mp ax) = 0 \ .$$

Il s'en suit deux intégrales intermédiaires:

$$p + ay = \varphi'(q - ax) \ ,$$
$$p - ay = \psi'(q + ax) \ ,$$

φ' et ψ' désignant les dérivées des deux fonctions arbitraires φ et ψ.

L'intégration peut être achevée en partant d'une seule de ces intégrales. Prenons, par exemple, la première. Si l'on y introduit la nouvelle fonction inconnue:

$$z_1 = z + axy \ ,$$

la première intégrale considérée va devenir:

$$p_1 = \varphi'(q_1 - 2ax) \ ,$$

p_1 et q_1 désignant respectivement les dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial y}$.

Les variables étant séparées, on a l'intégrale complète

$$z_1 = -\frac{1}{2a}\varphi(\mathrm{C} - 2ax) + \mathrm{C}y + \mathrm{C}_1 \ ,$$

---

[1] N. Saltykow, Equations aux dérivées partielles du second ordre intégrables par un système de Charpit (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. II, 1933, p. 66).

N. Saltykow, Equations aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes intégrables par un système de Charpit (*Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, t. III, 1934, p. 161).

[2] Voir plus haut, p. 133, *loc. cit.*

C et C_1 étant deux constantes arbitraires. En formant l'intégrale générale et revenant à l'ancienne fonction inconnue, on obtient l'intégrale générale de l'équation considérée (9) sous la forme d'un ensemble des deux équations suivantes:

$$z + axy = -\frac{1}{2a}\varphi(C - 2ax) + Cy + \theta(C) ,$$

$$-\frac{1}{2a}\varphi'(C - 2ax) + y + \theta'(C) = 0 ,$$

θ désignant la seconde fonction arbitraire et C étant un paramètre variable.

Il est aisé, d'une autre manière, de profiter des deux intégrales intermédiaires obtenues. On pourrait les intégrer simultanément, au moyen d'une quadrature, si l'on parvenait à tirer la dérivée q hors de l'argument des fonctions arbitraires [1].

Certes, on y réussit aisément, grâce à la transformation de Legendre, en prenant q pour nouvelle variable indépendante que l'on désignera par Y. En revenant, après la quadrature effectuée, aux anciennes variables, on obtient l'intégrale cherchée sous la forme d'un ensemble de deux équations:

$$z = y\,Y + \frac{1}{2a}\left[\psi(Y + ax) - \varphi(Y - ax)\right] ,$$

$$2ay = \varphi'(Y - ax) - \psi'(Y + ax) ,$$

où Y figure à titre de paramètre variable. On voit aisément que cette dernière intégrale se transforme en la précédente, par une transformation convenable du paramètre variable.

Prenons, comme nouvel exemple, l'équation de E. Goursat, concernant la transformation des surfaces [2]:

$$Xpt + rt - s^2 = 0 , \qquad (10)$$

X désignant une fonction quelconque de la variable x.

---

1 N. Saltykow, Application des transformations de contact à l'intégration des équations aux dérivées partielles (*Bulletin de l'Académie royale serbe*. A. Sciences mathématiques et physiques, n° 3, Belgrade, 1936, p. 41).

2 *American Journal of Mathematics*, vol. XIV, et *Cours d'Analyse*, 4me éd., t. III, Paris, 1927, « Exercices », p. 88. La fonction X y est remplacée par $f'(x)$.

En posant

$$X = \frac{\mathfrak{X}'}{\mathfrak{X}}, \quad \mathfrak{X} = e^{\int X dx},$$

l'équation de E. Goursat (10) devient

$$(\mathfrak{X}'p + \mathfrak{X}r)\, t - s \,.\, \mathfrak{X} \,.\, s = 0$$

et peut être écrite de la manière suivante:

$$\frac{\partial(\mathfrak{X}p)}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial(\mathfrak{X}p)}{\partial y} = 0 \,.$$

Il s'ensuit l'intégrale intermédiaire:

$$\mathfrak{X}p = \varphi(q) \,,$$

φ étant une fonction arbitraire.

Or, cette dernière équation est aux dérivées partielles du premier ordre, les variables étant séparées.

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (10) devient

$$z = \varphi(C)\,\Theta(x) + Cy + \psi(C) \,,$$
$$\varphi'(C)\,\Theta(x) + y + \psi'(C) = 0 \,,$$

ψ désignant la seconde fonction arbitraire, C étant le paramètre variable, et la fonction $\Theta(x)$ s'exprimant en X de la manière suivante:

$$\Theta(x) = \int e^{-\int X dx}\, dx \,.$$

La nouvelle équation que nous allons étudier, est celle que M. A. Demoulin a bien voulu me proposer d'intégrer:

$$rt - s^2 + \varphi(z)\,(p^2 t - 2pqs + q^2 r) = 0 \,, \qquad (11)$$

après en avoir obtenu l'intégrale générale, grâce à des considérations géométriques.

Pour résoudre l'équation proposée, remarquons que l'on a les identités évidentes:

$$rt - s^2 \equiv p\left[\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{p}\right) - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{p}\right)\right],$$

$$p^2 t - 2pqs + q^2 r \equiv p^2\left[p\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{p}\right) - q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{p}\right)\right].$$

Par conséquent, l'équation (11), grâce à la réduction des termes, s'écrit de la manière suivante:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \varphi(z)\, p^2\right] \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{p}\right) - \left[\frac{\partial p}{\partial y} + \varphi(z)\, pq\right] \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{p}\right) = 0 .$$

Cela étant, divisons par p les expressions qui se trouvent entre crochets, ainsi que le second membre de cette dernière équation, et posons, ensuite,

$$e^{\int \varphi(z)\, dz} = Z .$$

L'équation étudiée devient alors:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\log p\, Z) \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{q}{p}\right) - \frac{\partial}{\partial y} (\log p\, Z) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{p}\right) = 0 .$$

Il s'ensuit l'intégrale de cette dernière équation sous la forme:

$$p\, Z = f\left(\frac{q}{p}\right) ,$$

f désignant une fonction arbitraire de $\frac{q}{p}$.

Or, cette dernière équation aux dérivées partielles du premier ordre appartient au type des équations de Lagrange, dont l'intégrale complète s'obtient, en joignant l'intégrale des caractéristiques $\frac{q}{p} = C$, C désignant une constante arbitraire.

Il s'en suit, donc, l'intégrale générale de l'équation (11) sous forme de l'ensemble des deux équations:

$$\int e^{\int \varphi(z)\, dz} dz = f(C)\,(x + Cy) + \psi(C) ,$$

$$f(C)\, y + f'(C)\,(x + Cy) + \psi'(C) = 0 ,$$

f et ψ désignant deux fonctions arbitraires, C étant un paramètre auxiliaire variable.

Il est aisé d'intégrer beaucoup d'autres équations, grâce aux procédés du groupement des termes.

Considérons, de ce fait, les quatre types d'équations suivants:

$$r - t + \varphi(z)(p + q) f(p - q) = 0 , \tag{12}$$

$$r - t + f(x, y, p - q) = 0 , \tag{13}$$

$$r + 2s + t + \varphi(z) f(p + q) = 0 , \tag{14}$$

$$r + 2s + t + f(x, y, p + q) = 0 , \tag{15}$$

les fonctions φ et f admettant des expressions quelconques.

M. A. Demoulin m'avait communiqué une méthode directe d'intégration de l'équation (12) dans le cas, où $f(p - q) \equiv p - q$, et de l'équation (14) dans le cas, où $f(p + q) \equiv (p + q)^2$.

Or, pour intégrer l'équation (12), dans l'hypothèse la plus générale, retranchons et ajoutons la variable s au premier membre de l'équation étudiée (12).

Elle pourra, alors, s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{1}{f(p - q)} \left[\frac{\partial}{\partial x}(p - q) + \frac{\partial}{\partial y}(p - q)\right] + \varphi(z)(p + q) = 0 .$$

En y introduisant les désignations:

$$\int \frac{d(p - q)}{f(p - q)} \equiv \Phi(p - q) , \qquad \int \varphi(z)\, dz \equiv Z ,$$

la dernière équation va devenir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\Phi(p - q) + Z\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi(p - q) + Z\right] = 0 .$$

L'intégration de l'équation obtenue, linéaire et du premier ordre par rapport aux dérivées partielles de la fonction qui se trouve entre crochets, donne l'intégrale générale première de l'équation (12):

$$\Phi(p - q) + Z = \Psi(y - x) , \tag{16}$$

Ψ désignant une fonction arbitraire.

Si l'on introduit deux nouvelles variables indépendantes ξ et η liées avec les anciennes par les relations:

$$y - x = \xi , \qquad y + x = \eta , \tag{17}$$

l'équation (16) prend la forme d'une équation différentielle ordinaire:

$$\Phi\left(-2\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) + Z = \Psi(\xi) .$$

L'intégration de cette dernière équation dépendra de la forme des fonctions Φ et Z. Son intégrale générale contiendra, au lieu de la constante arbitraire, une fonction arbitraire de la variable η. On en tirera l'intégrale générale de l'équation étudiée (12), au moyen de la transformation inverse des variables.

Quant à l'équation (13), on la mettra, ainsi que la précédente, sous la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(p-q) + \frac{\partial}{\partial y}(p-q) + f(x, y, p-q) = 0 . \tag{18}$$

C'est une équation linéaire, par rapport au binôme $p-q$, dont l'intégration dépendra de celle d'une équation différentielle ordinaire formée au moyen de la fonction f. Il restera, enfin, à intégrer une seconde équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, pour en tirer l'intégrale générale de l'équation donnée (13).

Passons à présent aux deux dernières équations (14) et (15).

On écrira aisément l'équation (14) de la manière suivante:

$$\frac{(p+q)}{f(p+q)}\left[\frac{\partial}{\partial x}(p+q) + \frac{\partial}{\partial y}(p+q)\right] + \varphi(z)(p+q) = 0 .$$

Cette dernière équation peut être mise sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[U(p+q) + Z\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[U(p+q) + Z\right] = 0 \tag{19}$$

où les fonctions U et Z sont définies respectivement par les quadratures:

$$U(p+q) \equiv \int \frac{(p+q)\, d(p+q)}{f(p+q)} , \qquad Z \equiv \int \varphi(z)\, dz .$$

Cela étant, on obtient, intégrant l'équation (19), l'intégrale générale première de l'équation (14) sous la forme:

$$U(p+q) + Z = \Psi(y+x) , \tag{20}$$

Ψ étant une fonction arbitraire.

La transformation de variables indépendantes, au moyen des formules (17), réduit l'équation (19) à la suivante:

$$\mathrm{U}\left(2\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + \mathrm{Z} = \Psi(\xi) \ .$$

L'équation obtenue est aux différentielles ordinaires, dont l'intégration dépend de la forme des fonctions U et Z. L'intégrale générale de cette dernière équation devra impliquer, au lieu d'une constante arbitraire, une nouvelle fonction arbitraire de ξ. On en tirera, au moyen de la transformation inverse des variables, l'intégrale générale de l'équation étudiée (14).

La dernière équation (15) va s'écrire de la manière suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(p + q) + \frac{\partial}{\partial y}(p + q) + f(x, y, p + q) = 0 \ .$$

Or, cette dernière équation va être intégrée d'une manière analogue à l'équation (18).

V. — Intégrations de quelques équations usuelles du second ordre.

Citons maintenant plusieurs équations, dont l'intégration est exposée dans maints traités de Goursat, de Forsyth, de Piaggio, ainsi que chez d'autres auteurs.

Considérons, en premier lieu, l'équation (Goursat, *Cours d'Analyse*, 4me éd., t. III, Paris, 1927. Exercices, p. 88):

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = 0 \ . \qquad (1)$$

En groupant les termes de cette équation (1), on va l'écrire

$$x\frac{\partial}{\partial x}(xp + yq) + y\frac{\partial}{\partial y}(xp + yq) = xp + yq \ .$$

L'intégrale générale de cette dernière équation aux dérivées partielles du premier ordre, par rapport au binôme $xp + yq$, se présente sous la forme:

$$xp + yq = xf\left(\frac{y}{x}\right) ,$$