

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA VARIATION DES FONCTIONS  
**Autor:** Vessiot, Ernest  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515782>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 24.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LA VARIATION DES FONCTIONS

PAR

Ernest VESSIOT (Marseille).

---

On a généralement recours à la formule dite des accroissements finis pour établir, dans l'enseignement, les théorèmes fondamentaux selon lesquels une fonction de variable réelle est constante, croissante, ou décroissante, dans un intervalle, si elle y a, en tout point, une dérivée qui soit, respectivement, nulle, positive ou négative. En voici des démonstrations, directes et élémentaires, qui ne font appel qu'à la notion même de dérivée<sup>1</sup>. Je n'ai pas pu savoir si elles sont nouvelles.

THÉORÈME I. — *Si une fonction  $f(x)$ , définie dans un intervalle  $(x_1, x_2)$ , y a, en tout point, une dérivée nulle, elle est constante dans cet intervalle.*

DÉMONSTRATION. — Il suffira de prouver que, pour tout intervalle  $(a, b)$  contenu dans  $(x_1, x_2)$ , on a, quel que soit le nombre positif  $\varepsilon$ ,

$$|f(b) - f(a)| < \varepsilon(b - a) . \quad (1)$$

Car il en résultera  $f(b) - f(a) = 0$ , c'est-à-dire  $f(b) = f(a)$ , pour tout couple de points  $x = a, x = b$ , de  $(x_1, x_2)$ .

Supposons, à cet effet, le contraire, c'est-à-dire que, pour un certain  $\varepsilon$ , on ait

$$|f(b) - f(a)| \geq \varepsilon(b - a) . \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> J'en ai donné d'autres précédemment, indépendantes aussi du théorème des accroissements finis. Mais elles utilisaient des notions de la théorie des ensembles, et le cas de la dérivée nulle y était traité d'une manière indirecte. Voir *Bulletin mathématique des Facultés des Sciences*, tome I, 1934, p. 33-48.

Soit  $c = \frac{a+b}{2}$ . Si l'on avait, à la fois,

$$|f(c) - f(a)| < \varepsilon(c - a), \quad |f(b) - f(c)| < \varepsilon(b - c),$$

on en déduirait, par addition,

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(c) - f(a)| + |f(b) - f(c)| < \varepsilon(b - a).$$

c'est-à-dire l'inégalité (1) contraire à l'hypothèse (2). Donc, pour l'un au moins des intervalles  $(a, c)$ ,  $(c, b)$ , que j'appellerai  $(a_1, b_1)$ , on aurait, comme pour  $(a, b)$ .

$$f(b_1) - f(a_1) \geq \varepsilon(b_1 - a_1).$$

En raisonnant sur  $(a_1, b_1)$  comme on vient de le faire pour  $(a, b)$ , et ainsi de suite, on conclurait donc à l'existence d'une suite illimitée d'intervalles  $(a_k, b_k)$ , tels que  $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ , et dont chacun serait contenu dans le précédent, pour chacun desquels on aurait, comme pour  $(a, b)$ ,

$$|f(b_k) - f(a_k)| \geq \varepsilon(b_k - a_k). \quad (3)$$

Mais les  $a_k$  et les  $b_k$  tendraient alors vers une limite commune, soit  $x_0$ , appartenant à chaque intervalle  $(a_k, b_k)$ . Si l'un des  $a_k$  était égal à  $x_0$ , il en serait de même pour tous les suivants: on aurait donc, à partir d'un certain rang,

$$x_0 - a_k = 0, \quad f(x_0) - f(a_k) = 0.$$

Dans le cas contraire, on aurait, pour  $k$  assez grand,

$$\left| \frac{f(a_k) - f(x_0)}{a_k - x_0} \right| < \varepsilon,$$

puisque  $a_k$  tendrait vers  $x_0$ , et que  $f(x)$  aurait, pour  $x = x_0$ , une dérivée nulle. On aurait donc dans les deux cas, pour  $k$  assez grand,

$$|f(x_0) - f(a_k)| \leq \varepsilon(x_0 - a_k),$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour  $x_0 = a_k$ . On aurait, de même, pour  $k$  assez grand,

$$|f(b_k) - f(x_0)| \leq \varepsilon(b_k - x_0),$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour  $x_0 = b_k$ . Comme on ne saurait avoir  $a_k = x_0 = b_k$ , on conclurait, par addition,

$$|f(b_k) - f(a_k)| \leq |f(b_k) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(a_k)| < \varepsilon(b_k - a_k) ,$$

ce qui serait en contradiction avec (3). L'hypothèse (2) est donc à rejeter, quel que soit  $\varepsilon$ . De sorte que (1) a bien lieu, pour tout  $\varepsilon$  (c.q.f.d.).

THÉORÈME II. — *Si une fonction  $f(x)$ , définie dans un intervalle  $(x_1, x_2)$ , y a, en tout point, une dérivée positive, elle est croissante dans cet intervalle.*

DÉMONSTRATION. — Il s'agit de prouver que, pour tout intervalle  $(a, b)$  contenu dans  $(x_1, x_2)$ , on a

$$f(b) - f(a) > 0 . \quad (1)$$

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire que, pour un certain intervalle  $(a, b)$ , contenu dans  $(x_1, x_2)$ , on ait

$$f(b) - f(a) \leq 0 . \quad (2)$$

Soit  $c = \frac{a+b}{2}$ . Si l'on avait, à la fois,

$$f(b) - f(c) > 0 , \quad f(c) - f(a) > 0 ,$$

on en conclurait, par addition, l'inégalité (1), contraire à l'hypothèse faite (2). Donc, pour l'un au moins des intervalles  $(a, c)$ ,  $(c, b)$ , que j'appellerai  $(a_1, b_1)$ , on devrait avoir, comme pour  $(a, b)$ ,

$$f(b_1) - f(a_1) \leq 0 .$$

En raisonnant sur  $(a_1, b_1)$  comme on vient de le faire pour  $(a, b)$ , et ainsi de suite, on conclurait donc à l'existence d'une suite illimitée d'intervalles  $(a_k, b_k)$ , tels que  $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ , et dont chacun serait contenu dans le précédent, pour lesquels on aurait, comme pour  $(a, b)$ ,

$$f(b_k) - f(a_k) \leq 0 . \quad (3)$$

Mais les  $a_k$  et les  $b_k$  tendraient alors vers une limite commune, soit  $x_0$ , appartenant à chacun des intervalles  $(a_k, b_k)$ . Si l'on avait  $a_k = x_0$  pour une valeur de  $k$ , il en serait de même pour les valeurs suivantes: on aurait donc, à partir d'un certain rang,

$$x_0 = a_k, \quad f(x_0) - f(a_k) = 0.$$

Dans le cas contraire, on aurait, pour  $k$  assez grand,

$$\frac{f(a_k) - f(x_0)}{a_k - x_0} > 0, \quad a_k - x_0 < 0,$$

puisque  $a_k$  tendrait vers  $x_0$ , pour  $k$  infini, et que  $f(x)$  aurait, pour  $x = x_0$ , une dérivée positive. On aurait donc, dans les deux cas, pour  $k$  assez grand

$$f(x_0) - f(a_k) \geq 0,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour  $a_k = x_0$ . On aurait de même, pour  $k$  assez grand,

$$f(b_k) - f(x_0) \geq 0,$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu que pour  $x_0 = b_k$ . Comme on ne peut pas avoir  $a_k = x_0 = b_k$ , on conclurait, par addition,

$$f(b_k) - f(a_k) > 0,$$

ce qui serait en contradiction avec (3). L'hypothèse (2) est donc à rejeter, quel que soit  $(a, b)$ , contenu dans  $(x_1, x_2)$ . De sorte que (1) a lieu pour tout couple de points  $x = a$ ,  $x = b$  de  $(x_1, x_2)$  (c.q.f.d.).

---