

SUR DES COURBES GAUCHES

Autor(en): **Turrière, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515786>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR DES COURBES GAUCHES

PAR

E. TURRIÈRE (Montpellier).

La variable aréolaire.

1. — Etant donnée une courbe plane quelconque, posons

$$x dy - y dx = r^2 d\theta = 2 d\sigma ;$$

σ est l'aire balayée par le rayon vecteur OM à partir d'une position fixe OM_0 . Les dérivées étant prises par rapport à cette variable σ :

$$xy' - yx' = 2 ;$$

$$xy'' - yx'' = 0 ;$$

Posons:

$$\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y} = \lambda .$$

Soient, d'autre part, le rayon R de courbure et ϖ la distance du pôle O à la tangente courante:

$$\frac{1}{R} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = - \frac{2\lambda}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} ,$$

$$\varpi = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} ; \frac{ds}{d\sigma} = \frac{2}{\varpi} ;$$

l'expression de λ est donc

$$\lambda = - \frac{4}{R\varpi^3} .$$

D'où les équations générales

$$x'' + \frac{4x}{R\varpi^3} = 0 \quad y'' + \frac{4y}{R\varpi^3} = 0 \quad (1)$$

pour une courbe générale du plan.

Si cette courbe est supposée décrite par un point matériel libre sous l'action d'une force centrale émanant du centre fixe O, le temps est proportionnel à l'aire σ (loi des aires); les équations précédentes exprimant que la loi de force centrale est

$$F = -mC^2 \frac{r}{R\varpi^3}.$$

(m masse du point, C constante des aires). Cette expression générale de la force centrale pour une trajectoire quelconque est due à MOIVRE; il la communiqua en 1705, sans démonstration, à Jean BERNOULLI, qui la démontra en 1706.

Comme autres formules de dérivation avec la variable σ , citons les suivantes:

$$r^2 \theta' = 2, \quad r' = \frac{2}{r} \cotg V.$$

$$r^3 \frac{d^2 r}{d\sigma^2} = 4 \left(1 - \frac{r^4}{R\varpi^3} \right),$$

$$\frac{d^2 (r^2)}{d\sigma^2} = \frac{8}{\varpi^2} \left(1 - \frac{r^2}{R\varpi} \right).$$

$$\frac{d^2 (r^n)}{d\sigma^2} = 4nr^{n-4} \left[1 - \frac{r^4}{R\varpi^3} + (n-1) \cotg^2 V \right];$$

$$= 4nr^{n-4} \left[2 - n + (n-1) \frac{r^2}{\varpi^2} - \frac{r^4}{R\varpi^3} \right].$$

$$\frac{d^2 (\text{Log } r)}{d\sigma^2} = \frac{4}{r^4} \left[2 - \frac{r^2}{\varpi^2} - \frac{r^4}{R\varpi^3} \right].$$

Il en résulte que r et σ sont linéairement liées pour les courbes $r^4 = R\varpi^3$; celles-ci comprennent les cercles de centre O et les spirales hyperboliques $r\theta = \text{const.}$

De même, r^2 et σ sont liées linéairement pour

$$r^2 = R\varpi;$$

ces courbes comprennent les cercles et les spirales logarithmiques

$$\frac{r}{\varpi} = \text{const.}$$

Courbes analogues aux géodésiques.

2. — Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \\ x & y & -z \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

définissant les courbes (C) caractérisées par la propriété suivante: *le plan osculateur au point courant M est constamment parallèle à la droite OM, symétrique de OM par rapport au plan Oxy de coordonnées.*

L'équation ci-dessus où les dérivées sont prises par rapport à une variable t quelconque est susceptible de prendre diverses formes par choix convenable de variable.

La variable étant l'azimut polaire θ

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

l'équation prend la forme

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} - 2 \frac{r'}{r} \frac{dz}{d\theta} + \frac{rr'' - 2r'^2 - r^2}{r^2} z = 0. \quad (3)$$

Si la fonction $r(\theta)$ de dérivées r' et r'' est donnée, la question est de déterminer celles des courbes (C) situées sur un cylindre donné parallèle à l'axe Oz; elle dépend d'une équation linéaire, homogène du second ordre en z .

En introduisant la fonction

$$u = \frac{1}{r},$$

l'équation se met sous une forme plus simple:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + 2 \frac{u'}{u} \frac{dz}{d\theta} - \frac{u + u''}{u} z = 0. \quad (4)$$

En prenant r pour variable, mais r' et r'' désignant toujours les dérivées de r relativement à θ , l'équation est la suivante:

$$r'^2 \frac{d^2 z}{dr^2} + \left(r'' - 2 \frac{r'^2}{r} \right) \frac{dz}{dr} + \frac{rr'' - 2r'^2 - r^2}{r^2} z = 0 . \quad (5)$$

$$u'^2 \frac{d^2 z}{dr^2} + u^2 u'' \frac{dz}{dr} + u^3 (u + u'') z = 0 . \quad (6)$$

Ces équations s'appliqueront à la détermination des courbes considérées situées sur les surfaces

$$z = r^n .$$

En posant

$$\left(\frac{r'}{r} \right)^2 = \omega$$

l'équation linéaire

$$\frac{n+1}{2} r \cdot \frac{d\rho}{dr} + (n^2 - 2n - 1) \rho = 1$$

aura l'intégrale:

$$\rho = \frac{1}{n^2 - 2n + 1} + Ar^{2 \frac{1+2n-n^2}{n+1}} ;$$

d'où $\theta(z)$ par quadrature.

3. — La courbe (C) peut aussi être représentée au moyen de son plan osculateur

$$x \cos t + y \sin t + \mu z = H ;$$

μ et H sont deux fonctions arbitraires de t . Le point d'osculation M de ce plan a pour cote

$$z = \frac{H + H''}{\mu + \mu''}$$

H'' et μ'' désignant les dérivées secondes de H et μ en fonction de t . La condition de parallélisme du plan osculateur avec la

droite de direction $(x, y, -z)$ est

$$\begin{aligned} x \cos t + y \sin t - z &= 0 . \\ 2 \mu z &= H , \\ 2 \mu (H + H'') &= H (\mu + \mu'') . \\ \frac{\mu''}{\mu} &= 1 + 2 \frac{H''}{H} . \end{aligned} \quad (7)$$

c'est une équation

$$Y'' = f(X) \cdot Y$$

lorsque l'une ou l'autre des fonctions μ ou H est imposée, l'autre restant l'inconnue.

On peut encore se donner une fonction T arbitraire de t et déterminer les intégrales des deux équations indépendantes l'une de l'autre

$$H'' = T \cdot H ; \quad \mu'' = (2T + 1) \mu .$$

4. — Si la courbe projetée sur Oxy est représentée en coordonnées polaires tangentielles

$$\begin{aligned} x \cos \varphi + y \sin \varphi &= \bar{\omega} \\ -x \sin \varphi + y \cos \varphi &= \bar{\omega}' \\ x' \cos \varphi + y' \sin \varphi &= 0 \\ -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi &= R \\ x'' \cos \varphi + y'' \sin \varphi &= -R \\ -x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi &= R' \end{aligned}$$

où R désigne l'expression algébrique

$$R = \bar{\omega} + \bar{\omega}''$$

du rayon de courbure et R' sa dérivée en φ , l'équation différentielle est

$$\begin{vmatrix} -R & R' & z'' \\ 0 & R & z' \\ \bar{\omega} & \bar{\omega}' & -z \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} - \frac{d \operatorname{Log} (\bar{\omega} R)}{d\varphi} \cdot \frac{dz}{d\varphi} - \frac{R}{\bar{\omega}} z = 0 . \quad (8)$$

5. — Ainsi l'équation générale des courbes (C) a été ramenée à diverses formes d'équations linéaires et homogènes du second ordre. Mais le choix de la variable aréolaire lui donnera la forme la plus expressive.

Les coordonnées x et y d'une courbe *quelconque* du plan Oxy satisfaisant aux identités (1)

$$\frac{d^2 x}{d\sigma^2} + \frac{4x}{R\varpi^3} = 0 ,$$

$$\frac{d^2 y}{d\sigma^2} + \frac{4y}{R\varpi^3} = 0 ,$$

l'équation des courbes (C) sera donc

$$\frac{d^2 z}{d\sigma^2} = \frac{4z}{R\varpi^3} ; \quad (9)$$

c'est-à-dire l'équation dérivant de (1) par le changement de variable σ en $i\sigma$.

La détermination des courbes (C) connaissant leurs projections sur Oxy s'effectue donc en exprimant x et y en fonction de la variable aréolaire σ . La solution générale est

$$z = Ax(i\sigma) + By(i\sigma) .$$

(A et B constantes arbitraires).

6. — Par exemple, au cercle

$$x = \cos \theta , \quad y = \sin \theta , \quad \theta = 2\sigma ,$$

sera associée:

$$z = A \operatorname{ch} \theta + B \operatorname{sh} \theta .$$

A l'hyperbole $x = \operatorname{ch} u$, $y = \operatorname{sh} u$, $u = 2\sigma$, sera associée:

$$z = A \cos u + B \sin u .$$

A la spirale hyperbolique $r\theta = 1$,

$$2\sigma = r_0 - r ,$$

on associera :

$$z = \frac{a \operatorname{ch} \theta + b \operatorname{sh} \theta}{\theta} .$$

7. — Dans le cas de l'hyperboloïde de révolution

$$z^2 = r^2 - a^2 ,$$

à méridienne équilatère, l'équation (3) est identique à celle des *géodésiques* de la surface. L'intégration se fait par les fonctions elliptiques.

8. — *Détermination des surfaces* (Σ) *dont les lignes asymptotiques sont des courbes* (C).

La propriété des courbes (C) d'être les courbes dont le plan osculateur au point (x, y, z) courant est parallèle à la direction de droite $(x, y, -z)$ donne immédiatement l'équation

$$px + qy + z = 0$$

aux dérivées partielles, linéaire, du premier ordre des surfaces (Σ).

z est donc une fonction homogène, de degré -1 de x et y .

L'équation générale des surfaces (Σ) peut donc être prise sous la forme

$$z = \frac{1}{r} e^{\Phi} ;$$

Φ est une fonction arbitraire de θ .

Les lignes (C) tracées sur cette surface ont pour équation

$$\Phi'' = \frac{r^2 - 2r'^2}{r^2} + 4 \frac{r'}{r} \Phi' - \Phi'^2 .$$

$$\operatorname{Log} \left(\frac{z}{z_0} \right) = \pm \int \sqrt{\frac{1 + \Phi'^2 - \Phi''}{2}} d\theta .$$

Elles sont identiques aux deux familles d'asymptotiques.

Ces surfaces (Σ) rentrent dans le type plus général des surfaces de JAMET

$$xf\left(\frac{y}{x}\right) = F(z)$$

avec ici

$$F(z) = \frac{1}{z} ;$$

d'où une nouvelle méthode de réduction à une quadrature de leurs lignes asymptotiques.

En particulier, la surface de révolution

$$z \sqrt{x^2 + y^2} = 1 ,$$

engendrée par la rotation de l'hyperbole équilatère autour d'une asymptote, admet pour asymptotiques et courbes (C) les courbes

$$2z'^2 = z^2 ,$$

$$2r'^2 = r^2 ,$$

$$r = r_0 e^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}} .$$

Ce sont des spirales logarithmiques, en projection sur Oxy . Le même résultat s'obtient comme cas particulier $n = -1$ des surfaces

$$z = r^n ,$$

du paragraphe 2.
