SUR DES COURBES GAUCHES

PAR

E. Turrière (Montpellier).

La variable aréolaire.

1. — Etant donnée une courbe plane quelconque, posons

$$x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta = 2\,d\sigma \ ;$$

σ est l'aire balayée par le rayon vecteur OM à partir d'une position fixe OM_0. Les dérivées étant prises par rapport à cette variable σ:

$$xy' - yx' = 2 \ ;$$

$$xy'' - yx'' = 0 \ ;$$

Posons:

$$\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y} = \lambda \ .$$

Soient, d'autre part, le rayon R de courbure et ϖ la distance du pôle O à la tangente courante:

$$\frac{1}{R} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{2\lambda}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \ ,$$

$$\varpi = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \ ; \ \frac{ds}{d\sigma} = \frac{2}{\varpi} \ ;$$

l'expression de λ est donc

$$\lambda = -\frac{4}{R\varpi^3} \ .$$

D'où les équations générales

$$x'' + \frac{4\,x}{R\,\varpi^3} = 0 \qquad y'' + \frac{4\,y}{R\,\varpi^3} = 0 \tag{1}$$

pour une courbe générale du plan.

Si cette courbe est supposée décrite par un point matériel libre sous l'action d'une force centrale émanant du centre fixe O, le temps est proportionnel à l'aire σ (loi des aires); les équations précédentes exprimant que la loi de force centrale est

$$F = -\,m\,C^2 \cdot \frac{r}{R\,\varpi^3}\,.$$

(m masse du point, C constante des aires). Cette expression générale de la force centrale pour une trajectoire quelconque est due à MOIVRE; il la communiqua en 1705, sans démonstration, à Jean BERNOULLI, qui la démontra en 1706.

Comme autres formules de dérivation avec la variable σ, citons les suivantes:

$$r^2\,\theta' = 2\ , \qquad r' = \frac{2}{r}\,\mathrm{cotg}\,V\ .$$

$$r^3\,\frac{d^2 r}{d\sigma^2} = 4\left(1 - \frac{r^4}{R\,\varpi^3}\right)\,,$$

$$\frac{d^2\,(r^2)}{d\sigma^2} = \frac{8}{\varpi^2}\left(1 - \frac{r^2}{R\,\varpi}\right)\,.$$

$$\frac{d^2\,(r^n)}{d\sigma^2} = 4\,n r^{n-4}\left[1 - \frac{r^4}{R\,\varpi^3} + (n-1)\,\mathrm{cotg}^2\,V\right]\,;$$

$$= 4\,n r^{n-4}\left[2 - n + (n-1)\,\frac{r^2}{\varpi^2} - \frac{r^4}{R\,\varpi^3}\right]\,.$$

$$\frac{d^2\,(\mathrm{Log}\,r)}{d\sigma^2} = \frac{4}{r^4}\left[2 - \frac{r^2}{\varpi^2} - \frac{r^4}{R\,\varpi^3}\right]\,.$$

Il en résulte que r et σ sont linéairement liées pour les courbes $r^4 = R\varpi^3$; celles-ci comprennent les cercles de centre O et les spirales hyperboliques $r\theta = \text{const.}$

De même, r^2 et σ sont liées linéairement pour

$$r^2 = R\,\varpi\ ;$$

ces courbes comprennent les cercles et les spirales logarithmiques

$$\frac{r}{\varpi} = \text{const.}$$

Courbes analogues aux géodésiques.

2. — Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} x'' & y'' & z'' \\ x' & y' & z' \\ x & y & -z \end{vmatrix} = 0 , \tag{2}$$

définissant les courbes (C) caractérisées par la propriété suivante: *le plan osculateur au point courant* M *est constamment parallèle* à la droite OM, symétrique de OM par rapport au plan Oxy de coordonnées.

L'équation ci-dessus où les dérivées sont prises par rapport à une variable t quelconque est susceptible de prendre diverses formes par choix convenable de variable.

La variable étant l'azimut polaire θ

$$x = r\cos\theta , \qquad y = r\sin\theta ,$$

l'équation prend la forme

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} - 2\frac{r'}{r}\frac{dz}{d\theta} + \frac{rr'' - 2r'^2 - r^2}{r^2} z = 0 . \tag{3}$$

Si la fonction $r(\theta)$ de dérivées r' et r'' est donnée, la question est de déterminer celles des courbes (C) situées sur un cylindre donné parallèle à l'axe Oz; elle dépend d'une équation linéaire, homogène du second ordre en z.

En introduisant la fonction

$$u = \frac{1}{r} ,$$

l'équation se met sous une forme plus simple:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + 2\frac{u'}{u}\frac{dz}{d\theta} - \frac{u + u''}{u} z = 0 . \tag{4}$$