

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA «COURBE CATOPTRIQUE » D'EULER
Autor: Loria, Gino
Kapitel: II. — Formules fondamentales.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515787>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 24.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

écrite par Euler le 25 juin 1748 (*id.*, p. 463 et suiv.), lorsque Oechliz proposa un nouveau procédé de solution ¹, car cela lui donna l'occasion de concevoir une troisième méthode pour le résoudre, dont il s'empressa de faire part à son ami; celui-ci s'y intéressa de nouveau, comme cela est prouvé par plusieurs passages de la correspondance dont nous nous occupons (p. 470, 483, 485, 490, 498), le dernier est inséré dans la lettre qui porte la date 25 juin 1749. Dans presque toutes les lettres citées on trouve des propriétés de la *courbe catoptrique* (terme employé par les deux géomètres), avec des considérations spéciales sur les cas où elle est algébrique; leur étude offre un réel intérêt historique, car elles appartiennent à l'époque qui précède immédiatement le moment où le grand mathématicien bâlois allait donner aux mathématiques, appelées alors *sublimes*, la forme qu'elles étaient destinées à conserver, jusqu'au jour où le concept de rigueur imposa une refonte *ab imis fundamentis* de toute l'analyse infinitésimale.

II. — FORMULES FONDAMENTALES.

3. — La base de la première méthode de résolution imaginée par Euler se trouve dans une remarquable formule exprimant la distance entre un point quelconque M d'une courbe plane et le point correspondant O de sa caustique par rapport à un point quelconque C de son plan; O est donc l'intersection du rayon réfléchi par rapport au rayon CM et de son consécutif. Euler fait la recherche par un procédé aussi ingénieux que fatigant, basé sur des considérations de géométrie élémentaire, développées magistralement, même dans les cas où les éléments considérés (segments de droite et angles) sont infinitésimaux; les coordonnées cartésiennes n'apparaissent en aucune façon, car Euler suppose que la courbe considérée soit déterminée par une relation entre le rayon vecteur ρ d'un quelconque M de ses points, ayant comme origine le point lumineux C et l'angle μ qu'il forme avec la tangente à la courbe au point M. Au lieu de

¹ Il ne m'a pas été possible de trouver des renseignements ni sur ce mathématicien ni sur ses recherches citées dans le texte.

résumer le long raisonnement eulérien, nous allons déterminer la longueur du segment MO en fonction de ρ et μ , en employant tour à tour les coordonnées orthogonales x, y ayant C comme origine et les coordonnées polaires φ, ω par rapport à ce même point: de cette manière seront apaisés les doutes des personnes qui n'ont pas une foi complète dans les raisonnements ayant recours à des grandeurs infinitésimales. Remarquons d'abord que l'angle μ formé par le rayon CM avec les tangentes au point M de la courbe considérée est déterminé en coordonnées orthogonales par la formule

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{y \, dx - x \, dy}{x \, dx + y \, dy} ;$$

en introduisant les coordonnées polaires elle devient

$$\operatorname{tg} \mu = - \frac{\rho \cdot d\omega}{d\rho} ;$$

on en tire

$$d\omega = - \frac{d\rho \cdot \operatorname{tg} \mu}{\rho} . \quad (1)$$

Le rayon réfléchi du rayon CM aura une équation de la forme

$$\frac{Y - y}{X - x} = \lambda ,$$

où X, Y sont les coordonnées courantes et λ doit être déterminé par la condition qu'il forme avec CM l'angle $180^\circ - 2\mu$; on a donc

$$\frac{\lambda x - y}{\lambda y + x} = \operatorname{tg} (180^\circ - \lambda) ,$$

ce qui prouve que

$$\lambda = \frac{y - x \operatorname{tg} 2\mu}{x + y \operatorname{tg} 2\mu} .$$

Il s'en suit que l'équation du rayon réfléchi est:

$$(X - x) (x \sin 2\mu - y \cos 2\mu) + (Y - y) (x \cos 2\mu + y \sin 2\mu) = 0 \quad (2)$$

La caustique étant l'enveloppe de cette droite, pour déterminer le point O il faudra combiner cette équation avec sa

dérivée, en considérant que x, y, ρ, ω, μ sont toutes des fonctions de la variable en fonction de laquelle est déterminée la position de tout point de la courbe. Or, en introduisant les coordonnées polaires, l'équation (2) devient :

$$(X - x) \sin (2\mu - \omega) + (Y - y) \cos (2\mu - \omega) = 0 ; \quad (2')$$

si on écrit au lieu de cette équation les deux suivantes

$$X - x = \sigma \cos (2\mu - \omega) , \quad Y - y = -\sigma \sin (2\mu - \omega) , \quad (2'')$$

σ sera précisément la longueur cherchée, pourvu que μ et ω soient déterminés en tenant compte de l'équation dérivée de la (2'). Cette dérivée étant

$$\begin{aligned} [(X - x) \cos (2\mu - \omega) - (Y - y) \sin (2\mu - \omega)] (2\mu' - \omega') = \\ = x' \sin (2\mu - \omega) + y' \cos (2\mu - \omega) . \end{aligned}$$

Pour déterminer σ on a l'équation

$$\sigma (2d\mu - d\omega) = dx \cdot \sin (2\mu - \omega) + dy \cdot \cos (2\mu - \omega) . \quad (3)$$

Or la relation (1) donne

$$2d\mu - d\omega = \frac{2\rho \cos \mu \cdot d\mu + \sin \mu \cdot d\rho}{\rho \cos \mu} ;$$

et comme

$$dx = d\rho \cdot \cos \omega - \rho \sin \omega \cdot d\omega , \quad dy = d\rho \cdot \sin \omega + \rho \cos \omega \cdot d\omega$$

le second membre de l'équation (3) prend la forme suivante :

$$\frac{d\rho \cdot \sin \mu}{\cos \mu} .$$

L'équation (3) devient donc

$$\sigma \frac{2\rho \cos \mu \cdot d\mu + \sin \mu \cdot d\rho}{\rho \cos \mu} = \frac{d\rho \cdot \sin \mu}{\cos \mu} ,$$

qui donne σ , c'est-à-dire

$$MO = \frac{\rho d\rho \cdot \sin \mu}{2\rho \cos \mu \cdot d\mu + \sin \mu \cdot d\rho}; \quad (4)$$

c'est précisément la formule découverte par Euler ¹.

4. — Ce grand savant lui a donné une autre forme en introduisant, au lieu de ρ et μ , deux nouvelles variables que nous

¹ Une formule analogue existe pour le rayon de courbure R d'une ligne plane quelconque; elle peut se démontrer par des calculs analogues à ceux employés dans le texte, comme nous allons le prouver. Nous partirons à cet effet des formules

$$\frac{Y-y}{X-x} = -\frac{1}{y'}, \quad \text{tg } \mu = \frac{y-xy'}{x+yy'}$$

dont la première représente la normale et la seconde a déjà été utilisée par nous. En éliminant y' on trouve l'équation

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{x \cos \mu + y \sin \mu}{x \sin \mu - y \cos \mu}.$$

En introduisant partiellement les coordonnées polaires elle devient

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{\cos(\mu - \omega)}{\sin(\mu - \omega)};$$

si on lui substitue les deux

$$X-x = R \sin(\mu - \omega), \quad Y-y = R \cos(\mu - \omega),$$

R sera la longueur que nous cherchons, pourvu que cette longueur soit déterminée à l'aide de l'équation dérivée de l'équation de la normale; qui est

$$(X-x) \cos(\mu - \omega) - (Y-y) \sin(\mu - \omega) = 0.$$

Cette dérivée étant

$$[(X-x) \sin(\mu - \omega) + (Y-y) \cos(\mu - \omega)](\mu' - \omega') = y' \sin(\mu - \omega) - x' \cos(\mu - \omega)$$

on trouve

$$R = \frac{y' \sin(\mu - \omega) - x' \cos(\mu - \omega)}{\mu' - \omega'}.$$

Substituant à x' , y' leurs valeurs on obtient

$$R = \frac{\rho \sin \mu \cdot d\omega - \cos \omega \cdot d\rho}{d\mu - d\omega}$$

et comme $d\omega$ a la valeur donnée par la formule (1) du texte, on peut faire disparaître la variable ω ; on arrive alors à l'expression suivante de R:

$$R = \frac{-\rho \cdot d\rho}{d\rho \cdot \sin \mu + \cos \mu \cdot d\mu}$$

qui est celle annoncée; elle est remarquable car elle contient seulement des différentielles du premier ordre.

allons définir. A cet effet menons (fig. 1) du point C la droite CT perpendiculaire à la tangente au point M de la courbe et de son pied T la perpendiculaire TS au rayon vecteur CM; les nouvelles

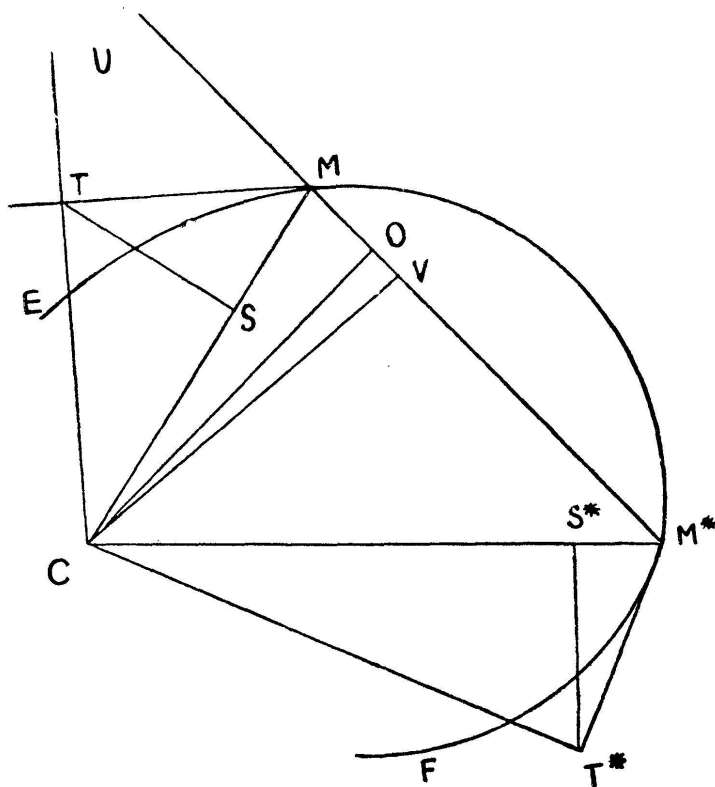


Fig. 1.

variables sont les longueurs $CS = r$ et $TS = s$. L'inspection de la figure prouve qu'elles sont exprimées de la manière suivante en fonction de ρ et μ

$$r = \rho \sin^2 \mu, \quad s = \rho \sin \mu \cdot \cos \mu; \quad (5)$$

inversement on a

$$\rho = \frac{r^2 + s^2}{r}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{r}{s}. \quad (5')$$

Or, par un raisonnement géométrique tout à fait original (et qui prend la place du changement de variables déterminé par les formules (5) ou (5')) Euler donne à la formule (4) l'aspect suivant :

$$MO = 2s \frac{ds}{dr} + \frac{r^2 - s^2}{r}, \quad (4')$$

d'une étonnante simplicité¹. L'étude de la même figure mène aux relations suivantes :

$$\sin \text{MCT} = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}, \quad \cos \text{MCT} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} ; \quad (6)$$

comme l'angle CMO est le double de CMT, on a encore

$$\sin \text{CMO} = \frac{2s}{r^2 + s^2}, \quad \cos \text{CMO} = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}. \quad (6')$$

Si enfin on appelle U l'intersection du rayon réfléchi avec la droite CT (qui est la perpendiculaire menée du point C à la tangente au point M), on voit que l'angle TMU étant lui aussi égal à μ , les deux triangles CMT et MTU sont égaux, le triangle CMU est isocèle et la tangente n'est que la perpendiculaire menée à sa base par son milieu.

REMARQUE. — Les formules (6), (6') et les dernières observations nous donnent l'occasion de relever, comme un caractère des procédés eulériens, l'habitude du grand géomètre de déterminer *toutes* les propriétés et de calculer *tous* les éléments de la figure considérée, même si les unes et les autres n'ont pas une liaison évidente avec la question étudiée; nous rencontrerons plus bas (voyez par exemple les dernières lignes du n° 7) des exemples de l'utilité de ce système.

III. — PRÉLIMINAIRES DE LA PREMIÈRE SOLUTION D'EULER.

5. — Comme les coniques à centre nous assurent que le problème catoptrique est résoluble, on est en droit de considérer sur la courbe cherchée EF (fig. 2) deux points MM*, tels que le rayon, MM* premier réfléchi de CM, donne par une nouvelle

¹ Nous invitons le lecteur qui a des doutes sur la justesse de notre appréciation de ce résultat à comparer la formule (4') à sa correspondante dans le système cartésien. En écrivant l'équation du rayon réfléchi (voyez la Remarque à la fin du n° 9) sous la forme $P(X - x) + Q(Y - y) = 0$, où P et Q sont des polynômes quadratiques en x, y, y' , on a

$$\text{MO} = - \frac{P + Qy'}{\begin{vmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{vmatrix}}.$$