

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA «COURBE CATOPTRIQUE » D'EULER  
**Kapitel:** III. — Préliminaires de la première solution d'Euler.  
**Autor:** Loria, Gino  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515787>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

d'une étonnante simplicité<sup>1</sup>. L'étude de la même figure mène aux relations suivantes :

$$\sin \text{MCT} = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}, \quad \cos \text{MCT} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} ; \quad (6)$$

comme l'angle CMO est le double de CMT, on a encore

$$\sin \text{CMO} = \frac{2s}{r^2 + s^2}, \quad \cos \text{CMO} = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}. \quad (6')$$

Si enfin on appelle U l'intersection du rayon réfléchi avec la droite CT (qui est la perpendiculaire menée du point C à la tangente au point M), on voit que l'angle TMU étant lui aussi égal à  $\mu$ , les deux triangles CMT et MTU sont égaux, le triangle CMU est isocèle et la tangente n'est que la perpendiculaire menée à sa base par son milieu.

REMARQUE. — Les formules (6), (6') et les dernières observations nous donnent l'occasion de relever, comme un caractère des procédés eulériens, l'habitude du grand géomètre de déterminer *toutes* les propriétés et de calculer *tous* les éléments de la figure considérée, même si les unes et les autres n'ont pas une liaison évidente avec la question étudiée; nous rencontrerons plus bas (voyez par exemple les dernières lignes du n° 7) des exemples de l'utilité de ce système.

### III. — PRÉLIMINAIRES DE LA PREMIÈRE SOLUTION D'EULER.

5. — Comme les coniques à centre nous assurent que le problème catoptrique est résoluble, on est en droit de considérer sur la courbe cherchée EF (fig. 2) deux points MM\*, tels que le rayon, MM\* premier réfléchi de CM, donne par une nouvelle

<sup>1</sup> Nous invitons le lecteur qui a des doutes sur la justesse de notre appréciation de ce résultat à comparer la formule (4') à sa correspondante dans le système cartésien. En écrivant l'équation du rayon réfléchi (voyez la Remarque à la fin du n° 9) sous la forme  $P(X - x) + Q(Y - y) = 0$ , où P et Q sont des polynômes quadratiques en  $x, y, y'$ , on a

$$\text{MO} = - \frac{P + Qy'}{\begin{vmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{vmatrix}}.$$

réflexion le rayon  $M^* C$ . Il est alors évident que le rayon réfléchi de  $CM^*$  ramènerait au point  $C$  après une nouvelle réflexion; donc les points  $M$  et  $M^*$  sont entre eux dans une relation permutable.

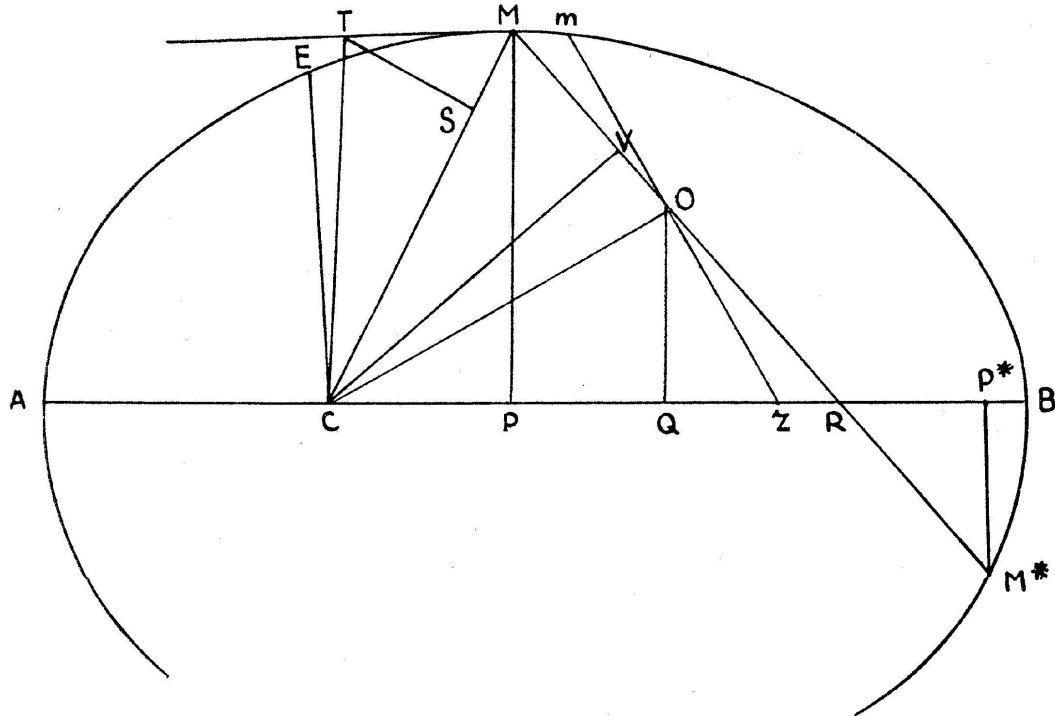


Fig. 2.

Sur le point  $M^*$  répétons les constructions et les considérations que nous avons exposées sur  $M$ , en employant les mêmes lettres avec un astérisque; seulement, par rapport aux signes des grandeurs, on doit tenir compte du sens des figures. Suivant Euler, on a alors cette double liste de formules:

$$CT = r, \quad TS = s$$

$$CT = \sqrt{r^2 + s^2}, \quad CM = \frac{r^2 + s^2}{r}$$

$$MT = \frac{s}{r} \sqrt{r^2 + s^2}$$

$$\sin CMO = \frac{2rs}{r^2 + s^2}, \quad \cos CMO = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}$$

$$MO = \frac{2s \, ds}{dr} + \frac{r^2 - s^2}{r}$$

$$C^*S^* = r^*, \quad T^*S^* = s^*$$

$$C^*T^* = \sqrt{r^{*2} + s^{*2}}, \quad CM^* = \frac{r^{*2} + s^{*2}}{r^*}$$

$$M^*T^* = -\frac{s^*}{r^*} \sqrt{r^{*2} + s^{*2}}$$

$$\sin CM^*O = \frac{2r^*s^*}{r^{*2} + s^{*2}}, \quad \cos CM^*O = \frac{r^{*2} - s^{*2}}{r^{*2} + s^{*2}}$$

$$M^*O = \frac{2s^* \, ds^*}{dr^*} + \frac{r^{*2} - s^{*2}}{r^*}$$

En menant la droite CV perpendiculaire au rayon MM\* on aura les relations suivantes <sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} CV = 2s, \quad MV = \frac{r^2 - s^2}{r} \\ OV = -\frac{2s ds}{dr}, \quad CO = \frac{2s \sqrt{dr^2 + ds^2}}{dr} \\ \operatorname{tg} \text{COM} = \frac{dr}{ds} \end{aligned} \right| \begin{aligned} CV = -2s^*, \quad M^*V = \frac{r^{*2} - s^{*2}}{r^*} \\ OV = \frac{2s^* ds^*}{ds^*}, \quad CO = -\frac{2s^* \sqrt{dr^{*2} + ds^{*2}}}{dr^*} \\ \operatorname{tg} \text{COM}^* = -\frac{dr^*}{ds^*} \end{aligned}$$

On en tire  $s^* = -s$ ,  $-\frac{2s ds}{dr} = \frac{2s^* ds^*}{dr^*}$ ; d'où  $dr^* + dr = 0$ .

En intégrant on peut écrire  $r^* + r = 2a$ . Si donc on pose  $r = a + \varphi$ , on aura  $r^* = a - \varphi$ ,  $\varphi$  étant une *fonction impaire* de  $s$ ; en choisissant *ad libitum* une fonction de cette espèce, la relation  $CS = a + \varphi$  déterminera une des courbes cherchées.

REMARQUE. — Rappelons qu'on a:

$$CS = r = \rho \sin^2 \mu, \quad \operatorname{tg} \mu = -\frac{\rho d\omega}{d\rho}, \quad s = \rho \sin \mu \cos \mu;$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} \sin \mu &= \frac{\rho d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}, \quad \cos \mu = \frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}, \\ s &= -\frac{\rho^2 d\rho \cdot d\omega}{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} \end{aligned}$$

et la relation trouvée par Euler devient

$$\frac{\rho^2 d\omega^2}{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} + a + \varphi \left( \frac{\rho^2 \cdot d\rho \cdot d\omega}{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} \right) = 0;$$

c'est l'équation différentielle générale des courbes catoptriques; nous allons voir comment Euler arrive à l'intégrer complètement, quelle que soit la fonction  $\varphi$ .

<sup>1</sup> Les relations précédentes, comme les suivantes, ont été déjà prouvées, ou bien peuvent se déduire des autres; par exemple on a

$$CV = CM \sin 2\mu = \frac{r^2 + s^2}{r} \cdot \frac{2rs}{r^2 + s^2} = 2s.$$