SUR LE THÉORÈME DE PILATTE

Autor(en): **Thébault, V.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515789

SUR LE THÉORÈME DE PILATTE

PAR

V. THÉBAULT, Le Mans (Sarthe).

Dans un récent article, M. Ervin FELDHEIM a obtenu plusieurs relations concernant des triangles inscrits à un triangle donné et une généralisation pour certains polygones [1]. Les propositions qu'il a signalées ne sont pas nouvelles et la bibliographie de ces questions est assez riche.

Etant donné l'intérêt que présente ce sujet de géométrie élémentaire, nous pensons présenter un travail utile en reprenant des développements déjà publiés ailleurs, pour les réunir et leur apporter quelques compléments.

1. — THÉORÈME I. — *Etant donnés deux polygones* (P) *et* (P′) *homothétiques, on désigne par* (π) *un troisième polygone circonscrit au premier et inscrit au second. Sa surface est moyenne proportionnelle entre celles des deux proposés* [2].

Soient $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ le polygone (P), $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les longueurs des côtés A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1, $A'_1A'_2A'_3 \ldots A'_n$ le polygone (P′), α_1, α_2, ..., α_n les distances mutuelles des côtés homologues des deux polygones et, enfin, $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ le polygone (π).

Appelons σ la surface de (π), S celle de (P), (S′) celle de (P′). On a la relation d'aires, en grandeur et en signe,

$$\sigma = B_1B_2B_3 \ldots B_n = A_1A_2A_3 \ldots A_n + A_1B_1A_2 + A_2B_2A_3 + \ldots$$

$$= S + \frac{1}{2}(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots) .$$

---

[1] *L'Enseignement mathématique*, 1938, p. 329-335.

[2] Ce théorème a été énoncé dans le cas du triangle par PILATTE (*Annales de* GERGONNE, 1811, p. 93), puis étendu aux polygones par L. ANNE (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1844, p. 27).

Posons

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + a_4\alpha_4 + \ldots = 2\Delta ,$$

il vient

$$\sigma = S + \Delta . \tag{1}$$

Soient O le centre d'homothétie de (P) et de (P'); x_1, x_2, x_3, x_4, ..., ses distances aux côtés A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., de (P). Ses distances aux côtés homologues de (P') seront

$$x_1 + \alpha_1 , \quad x_2 + \alpha_2 , \quad x_3 + \alpha_3 , \quad x_4 + \alpha_4 , \ \ldots ,$$

et on aura

$$\frac{x_1 + \alpha_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 + \alpha_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 + \alpha_3}{\alpha_3} = \frac{x_4 + \alpha_4}{\alpha_4} = \ldots ;$$

d'où

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \frac{x_3}{\alpha_3} = \frac{x_4}{\alpha_4} = \ldots = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots}{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \ldots} = \frac{2\,S}{2\Delta} = \frac{S}{\Delta} ;$$

d'ailleurs, le rapport d'homothétie de (P') à (P) est

$$\frac{x_1 + \alpha_1}{\alpha_1} = 1 + \frac{x_1}{\alpha_1} = 1 + \frac{\Delta}{S} = \frac{S + \Delta}{S} = \frac{\sigma}{S} ,$$

la dernière égalité résultant de la relation (1).

Le rapport des surfaces étant égal au carré du rapport d'homothétie, on a

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sigma^2}{S^2} , \qquad \text{ou} \qquad S \cdot S' = \sigma^2 . \tag{2}$$

C.Q.F.D.

Pour construire (π) connaissant (P) et (P'), menons par A_1 une droite quelconque rencontrant $A'_1A'_2$ en B''_1, $A'_nA'_1$ en B'''_n; B''_1A_2 coupe $A'_2A'_3$ en B''_2, B''_2A_3 coupe $A'_3A'_4$ en B''_3, ..., $B''_{n-1}A_n$ coupe $A'_nA'_1$ en B''_n. Les points B''_n et B'''_n forment sur $A'_nA'_1$ deux divisions homographiques dont les points doubles résolvent la question. Le problème admet donc deux solutions.

Corollaire (Théorème de Pilatte). — *Si deux triangles* ABC, A' B' C' *ont leurs côtés parallèles, et sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même triangle* $A_1B_1C_1$, *la surface de ce dernier est moyenne proportionnelle entre les surfaces des deux autres.*

Ce théorème, depuis longtemps classique, est employé dans la démonstration habituelle de la formule du volume du tronc de pyramide à bases parallèles triangulaires. Nous avons utilisé le théorème général relatif aux polygones pour obtenir la formule du volume du tronc de pyramide dont les bases sont des polygones de n côtés, sans passer au préalable, comme on le fait dans certains traités de géométrie, par le cas où les bases sont triangulaires [1].

Remarque. Pour que la relation (2) existe, il n'est pas nécessaire que les triples de points (B_1, A_2, B_2), ..., soient collinéaires, les points B_1, B_2, ..., pouvant être pris arbitrairement sur les côtés $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, ..., de (P').

2. — Théorème II. — *Si par les sommets* A, B, C *d'un triangle* ABC *on mène des droites* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *rencontrant les côtés* B'C', C'A', A'B' *d'un triangle* A'B'C', *de même sens que* ABC, *sous l'angle* θ *dans le même sens de rotation et que par* A', B', C' *on mène les droites* $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ *rencontrant* BC, CA, AB *sous l'angle* $\pi - \theta$ *dans le même sens de rotation que précédemment, les aires des triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *ainsi déterminés satisfont à la relation* [2]

$$\text{aire ABC} \cdot \text{aire } \alpha'\beta'\gamma' = \text{aire A'B'C'} \cdot \text{aire } \alpha\beta\gamma \ .$$

Faisons tourner le système des deux triangles ABC et $\alpha\beta\gamma$ d'un angle θ dans le sens de rotation donné, autour d'un point du plan. Ces triangles prennent les positions nouvelles $A_1B_1C_1$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ telles que le triangle $A_1B_1C_1$ a ses côtés parallèles à ceux de $\alpha'\beta'\gamma'$ et que le triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ a les siens parallèles à ceux de $A_1B_1C_1$. Inscrivons alors dans le triangle $A_1B_1C_1$ un triangle A''B''C'' ayant ses côtés parallèles à ceux de $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Les figures $A_1B_1C_1$ A''B''C'' et $\alpha'\beta'\gamma'$ A'B'C' sont homothétiques, de sorte que

$$\frac{\text{aire A'B'C'}}{\text{aire } \alpha'\beta'\gamma'} = \frac{\text{aire A''B''C''}}{\text{aire } A_1B_1C_1} \ .$$

[1] V. Thébault, *L'Education mathématique*, 1920, 22me année, p. 129.

[2] V. Thébault, *Journal de* Vuibert, 1919, 43me année, 88. — *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1921, pp. 152 à 157.

D'autre part, en vertu du corollaire précédent (théorème de PILATTE), nous avons

$$\frac{\text{aire } A''B''C''}{\text{aire } A_1B_1C_1} = \frac{\text{aire } A_1B_1C_1}{\text{aire } \alpha_1\beta_1\gamma_1} = \frac{\text{aire } ABC}{\text{aire } \alpha\beta\gamma} .$$

Par conséquent,

$$\frac{\text{aire } A'B'C'}{\text{aire } \alpha'\beta'\gamma'} = \frac{\text{aire } ABC}{\text{aire } \alpha\beta\gamma} . \qquad (3)$$

C.Q.F.D.

CAS PARTICULIERS. — Dans les hypothèses où l'on a $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, on peut énoncer les théorèmes suivants:

1. *Si par les sommets* A, B, C *d'un triangle on mène les parallèles* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *aux côtés* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ *d'un triangle* $A'B'C'$, *de même sens que* ABC, *et que par* A', B', C' *on mène les parallèles* $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ *aux côtés* BC, CA, AB *de* ABC, *les aires des triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *déterminés satisfont à la relation* [1]

$$\text{aire } ABC \cdot \text{aire } \alpha'\beta'\gamma' = \text{aire } A'B'C' \cdot \text{aire } \alpha\beta\gamma . \qquad (4)$$

2. *Si par les sommets* A, B, C *d'un triangle on mène les perpendiculaires* $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ *aux côtés* $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ *d'un triangle* $A'B'C'$, *de même sens que* ABC, *et que par* A', B', C' *on mène les perpendiculaires* $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\gamma'$ *aux côtés* BC, CA, AB de ABC, *les aires des triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *déterminés satisfont à la relation* [2]

$$\text{aire } ABC \cdot \text{aire } \alpha'\beta'\gamma' = \text{aire } A'B'C' \cdot \text{aire } \alpha\beta\gamma . \qquad (5)$$

Si les droites $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$ concourent en un point P, les points α, β, γ seront confondus en ce point, l'aire du triangle $\alpha\beta\gamma$ est alors nulle, et par suite, il en est de même de l'aire du triangle $\alpha'\beta'\gamma'$, ce qui exige que les droites $A'\beta'\gamma'$, $B'\gamma'\alpha'$, $C'\alpha'\beta'$ soient concourantes. On peut donc énoncer le théorème suivant qui caractérise les triangles *isologiques* et plus particulièrement les triangles *métaparallèles* et les triangles *orthologiques* [3]*:*

[1] V. THÉBAULT, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1921, loc. cit. — *L'Education mathématique*, 1921, p. 129. — R, GOORMAGHTIGH, *Mathesis*, 1932, p. 6.
[2] R. MARCHAY, *Journal de* VUIBERT, 40me année, p. 70.
[3] V. THÉBAULT, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, loc. cit.

Quand deux triangles ABC, A′ B′ C′ *sont tels que les obliques menées de* A, B, C *sous un angle donné* θ *aux côtés* B′C′, C′A′, A′B′ *sont concourantes, les obliques menées de* A′, B′, C′ *aux côtés* BC, CA, AB *sous l'angle* $\pi - \theta$ *de même sens, sont également concourantes.*

Remarques. Le cas où le triangle A′ B′ C′, par exemple, est *aplati*, mérite un examen particulier.

Les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ sont alors parallèles sans que, en général, $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$ se coupent en un même point. Ces dernières droites déterminent, par leurs intersections deux à deux, un triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ semblable à ABC et, si l'on désigne par λ et μ les angles de la droite $\Delta \equiv (A', B', C')$ avec BC et CA,

$$\left(\frac{\alpha'\beta'}{AB}\right)^2 = \frac{\text{aire } \alpha'\beta'\gamma'}{\text{aire ABC}} = \left(\frac{ab' \sin\lambda + a'b \sin\mu}{2\text{ABC}}\right)^2 ,$$

a, b, c et a', b', c' étant les longueurs des côtés BC, CA, AB et B′C′, C′A′, A′B′ des triangles ABC et A′B′C′.

Trois points A′, B′, C′ étant donnés en ligne droite, la condition nécessaire et suffisante pour que les droites $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$, issues de A′, B′, C′ et coupant les côtés BC, CA, AB du triangle ABC sous le même angle θ, soient concourantes, est que les longueurs des segments rectilignes B′C′, C′A′, A′B′ soient proportionnelles aux projections d'angle $\pi - \theta$, dans le même sens que θ, des côtés BC, CA, AB sur la droite Δ [1]. Dans ce cas, d'ailleurs, si on trace les parallèles à BC, CA, AB des points A′, B′, C′, le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ déterminé est tel que

$$ab' \sin\lambda + a'b \sin\mu = 2\text{ABC} ,$$

de sorte que

$$\text{aire } \alpha'\beta'\gamma' = \text{aire ABC} . \tag{6}$$

On retrouve ainsi la propriété fondamentale de l'*isopôle* d'une droite Δ, par rapport à un triangle ABC, et ce théorème important dû à J. NEUBERG [2]:

[1] V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1922, p. 410.

[2] *Wiskundig Tydsskrift*, t. 10, p. 80. — Ce théorème nous a suggéré d'intéressantes propriétés de l'isopôle et de l'orthopôle d'une transversale Δ par rapport à un triangle ABC, ainsi que du quadrilatère complet (ABC, Δ). (*Mathesis*, 1934, p. 270 et 397; 1938, p. 236; 1937, p. 183 et 242) (V. T.)

Par les sommets d'un triangle ABC, *on mène trois parallèles* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *qui rencontrent une transversale quelconque* Δ *en* α, β, γ. *Les parallèles aux côtés* BC, CA, AB, *menées par* α, β, γ, *forment un triangle* $A'B'C'$ *égal à* ABC.

3. — Prouhet a publié l'analogue du théorème de Pilatte pour deux polyèdres convexes homothétiques, intérieurs l'un à l'autre [1].

Théorème III. — *Soient* P *et* P′ *deux polyèdres convexes semblables et semblablement placés, le premier intérieur au second. Prenons sur chaque face de* P′ *un point et joignons-le aux sommets de la face homologue du polyèdre* P. *Nous formerons ainsi un polyèdre* Q, *à faces triangulaires, inscrit dans le polyèdre* P′ *et circonscrit au polyèdre* P. *Soit* Q′ *un quatrième polyèdre formé en joignant un point pris sur chaque face de* P *aux sommets de la face homologue de* P′. *En désignant par* P, P′, Q, Q′ *les volumes des quatre polyèdres, on aura*

$$Q = \sqrt[3]{P^2 P'} , \qquad Q' = \sqrt[3]{PP'^2} , \tag{7}$$

d'où l'on déduira

$$QQ' = PP' \qquad \text{et} \qquad \frac{Q}{Q'} = \sqrt[3]{\frac{P}{P'}} . \tag{8}$$

Une démonstration synthétique de ce théorème a été donnée dans la solution de la question n° 652 (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1863, p. 368).

En 1913, J. Neuberg a énoncé un théorème analogue concernant deux tétraèdres ABCD, $A'B'C'D'$, intérieurs l'un à l'autre, et ayant les faces homologues parallèles. Si l'on prend dans les faces de $A'B'C'D'$ quatre points quelconques A'', B'', C'', D'' et si on appelle V'' la somme des volumes des tétraèdres ABCD, $A''BCD$, $B''CDA$, $C''DAB$, V et V' les volumes ABCD, $A'B'C'D'$, on a la relation

$$V'' = \sqrt[3]{V^2 V'} . \tag{9}$$

En intervertissant les rôles des tétraèdres ABCD et $A'B'C'D'$ et appelant V''' la somme des volumes des tétraèdres $A'B'C'D'$,

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1863, p. 390.

A‴B′C′D′, B‴C′D′A′, C‴D′A′B′, A‴, B‴, C‴, D‴ étant des points quelconques dans les faces de ABCD, on a la relation [1]

$$V''' = \sqrt[3]{VV'^2} \ . \tag{10}$$

Il en résulte que

$$(11) \qquad V''V''' = VV' \qquad \text{et} \qquad \frac{V''}{V'''} = \sqrt[3]{\frac{V}{V'}} \ . \tag{12}$$

Le géomètre belge a donné de ses relations (9) et (10) une élégante démonstration en utilisant sa formule *nouvelle* [2]

$$\frac{V'}{V} = \left(1 - \frac{d_1}{h_1} - \frac{d_2}{h_2} - \frac{d_3}{h_3} - \frac{d_4}{h_4}\right)^3 . \tag{13}$$

Dans cette formule, h_1, h_2, h_3, h_4 représentent les longueurs des hauteurs du tétraèdre ABCD, et d_1, d_2, d_3, d_4 sont les distances des plans des faces homologues α et α', β et β', γ et γ', δ et δ' de ABCD, A′B′C′D′; la distance d_1, par exemple, est positive ou négative suivant que A et α' sont ou non du même côté de α.

Remarque. Si $A_1B_1C_1D_1$ est un tétraèdre, de volume V_1, circonscrit au tétraèdre ABCD et inscrit au tétraèdre A′B′C′D′, on peut prendre pour A″, B″, C″, D″ les points A_1, B_1, C_1, D_1, mais la relation (9) ne permet pas de substituer V_1 à V″, car $V_1 > V''$.

Les considérations qui précèdent permettent de résoudre facilement le problème suivant:

Par les sommets A, B, C, D *d'un tétraèdre* ABCD *on mène les plans* Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d *parallèles aux plans* B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′ *des faces d'un tétraèdre* A′B′C′D′, *de même sens que* ABCD *et par* A′, B′, C′, D′ *on mène les plans* Δ'_a, Δ'_b, Δ'_c, Δ'_d *parallèles à ceux des faces* BCD, CDA, DAB, ABC *du tétraèdre* ABCD. *Trouver une relation entre les volumes des tétraèdres* ABCD, A′B′C′D′ *et des deux tétraèdres formés par les quadruples de plans* (Δ_a, Δ_b, Δ_c, Δ_d) *et* (Δ'_a, Δ'_b, Δ'_c, Δ'_d).

---

[1] *Mathesis*, 1914, p. 32 et 1922, p. 242.
[2] *The Tohoku Mathematical Journal*, t. IV, nº 3 (1913).