Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE
Kapitel: III. — Multiplication des vecteurs.
Autor: Hjelmslev, Johannes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515790

en effectuant une rotation de 90° du côté positif, QS aura la même orientation que PR.

Pour que le quadrilatère PQRS devienne un carré, il faut que les deux segments PR et QS aient le même milieu, c'est-à-dire

$$Q + S = P + R$$

d'où l'on déduit grâce aux relations ci-dessus

$$\widehat{C} - \widehat{B} + \widehat{A} - \widehat{D} = \widehat{B} - \widehat{A} + \widehat{D} - \widehat{C} \ , \quad \text{ou} \quad D - C = A - B \ ,$$

c'est-à-dire: le quadrilatère ABCD doit être un parallélogramme.

III. — Multiplication des vecteurs.

18. — *On appelle produit de deux vecteurs le scalaire que l'on obtient en additionnant le produit des abscisses entre elles et le produit des ordonnées entre elles.*

Ecrivons:

$$a \,.\, b \quad \text{ou} \quad ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 \ .$$

Il en résulte que

$$ab = ba \ ,$$

$$a(b + c) = ab + ac \ ,$$

$$a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0 \ ,$$

$$a\widehat{a} = 0 \ , \qquad a \,.\, \lambda\widehat{a} = 0 \ .$$

19. — De l'équation

$$a(b + \lambda\widehat{a}) = ab \ ,$$

il s'ensuit que le produit *ab* reste invariable lorsque l'extrémité de l'un des vecteurs parcourt une droite perpendiculaire à l'autre. Il en résulte en particulier que *le produit ab est égal au produit de l'un des vecteurs et la projection de l'autre vecteur sur le premier.*

$a \,.\, b = 0$ signifie donc que les deux vecteurs a et b sont orthogonaux ou que l'un d'eux (ou les deux) est égal à zéro.

$\widehat{a\,b} = 0$ signifie que a et b se trouvent sur la même ligne ou sur des lignes parallèles.

Remarquons que

$$\widehat{a\,b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} .$$

Au lieu du produit aa l'on écrit aussi a^2 (carré de a), donc

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 .$$

De l'identité

$$A(B - C) + B(C - A) + C(A - B) = 0$$

l'on déduit que lorsque $\overline{OA}$ est orthogonal à $\overline{BC}$ et $\overline{OB}$ orthogonal à $\overline{CA}$, l'on a aussi $\overline{OC}$ orthogonal à $\overline{AB}$, c'est-à-dire le théorème que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

20. — L'on peut *représenter une ligne droite* menée par un point donné a et parallèle au vecteur b à l'aide d'un point variable x, exprimé par le paramètre λ

$$x = a + \lambda b ,$$

ou par l'équation

$$\widehat{(x - a)\,b} = 0 .$$

En particulier l'on a pour la ligne droite qui unit deux points donnés a et b la représentation paramétrique

$$x = a + \lambda(b - a) ,$$

ou l'équation

$$\widehat{(x - a)\,(b - a)} = 0 ,$$

qui s'écrit aussi

$$\widehat{x\,(a - b)} = \widehat{a\,b} .$$

21. — Deux vecteurs a et b sur la même droite ont un rapport λ. En les multipliant par le même vecteur c (qui ne leur est

pas orthogonal) l'on obtient deux scalaires qui ont aussi le rapport λ. Car

$$a = \lambda b ,$$

entraîne

$$ac = \lambda . bc .$$

Lorsqu'il s'agit de deux vecteurs a et b sur la même droite l'on peut donc écrire

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} ,$$

ou: dans le rapport $\frac{a}{b}$ l'on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par le même vecteur c.

22. — En voici une application.

L'on entend par bi-rapport (ABCD) de 4 points sur une droite (fig. 4) le nombre

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AD}}} : \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BD}}} =$$

$$= \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{D} - \mathrm{A}} : \frac{\mathrm{C} - \mathrm{B}}{\mathrm{D} - \mathrm{B}} .$$

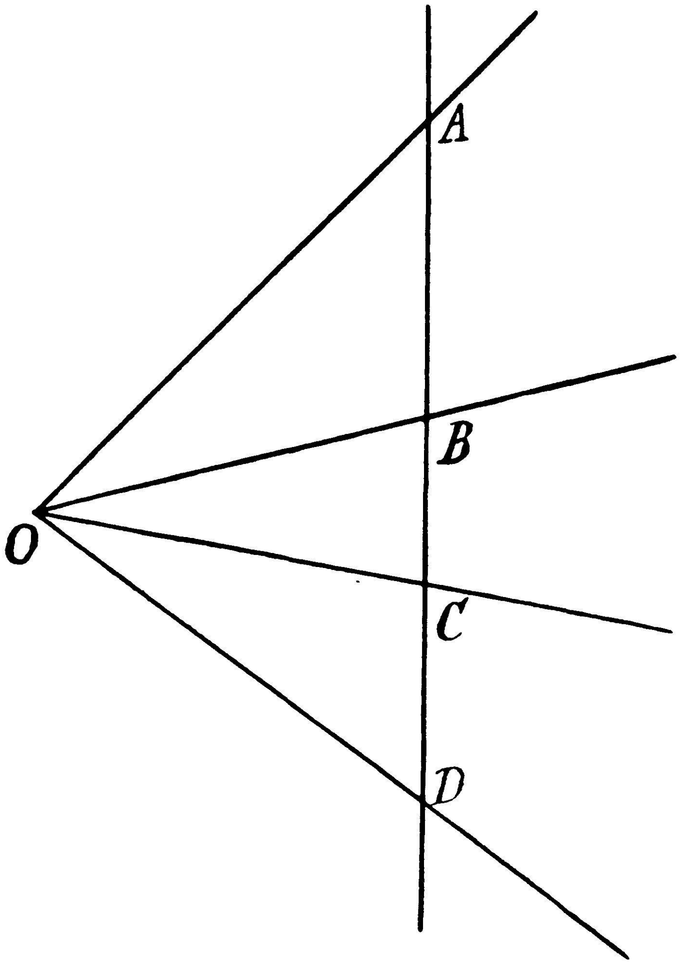

Fig. 4.

Si l'on multiplie le numérateur et dénominateur du premier rapport par $\widehat{\mathrm{A}}$, et le numérateur et dénominateur du deuxième rapport par $\widehat{\mathrm{B}}$, l'on obtient :

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{\widehat{\mathrm{A}}\,\mathrm{C}}{\widehat{\mathrm{A}}\,\mathrm{D}} : \frac{\widehat{\mathrm{B}}\,\mathrm{C}}{\widehat{\mathrm{B}}\,\mathrm{D}} .$$

Cette expression ne change pas de valeur lorsqu'on multiplie A par un scalaire quelconque λ; non plus lorsqu'on multiplie B, C ou D par un scalaire quelconque. Mais cela signifie qu'elle reste invariable lorsque les points A, B, C, D se déplacent d'une façon absolument quelconque sur les 4 droites qui les réunissent à O. Il en résulte entre autre que toute ligne droite coupera les 4 lignes en 4 points de même bi-rapport.

23. — Comme exemple de calcul de vecteurs nous allons résoudre le problème suivant:

Décomposer un vecteur c en deux autres aux orientations connues a et b, naturellement non parallèles.

De l'équation

$$\alpha a + \beta b = c \ ,$$

nous obtenons, en multipliant respectivement par $\hat{b}$ et $\hat{a}$,

$$\alpha = \frac{\hat{b}\, c}{\hat{b}\, a} \ , \qquad \beta = \frac{\hat{a}\, c}{\hat{a}\, b} \ ,$$

ce qui est identique à la résolution connue des deux équations

$$a_1 \alpha + b_1 \beta = c_1 \ ,$$
$$a_2 \alpha + b_2 \beta = c_2 \ .$$

Si l'on introduit les solutions obtenues dans l'équation initiale, l'on obtient l'identité

$$(\widehat{a\, b})\, c = (\widehat{a\, c})\, b - (\widehat{b\, c})\, a \ ;$$

si l'on remplace c par $\hat{c}$ l'on a, en multipliant ensuite par un vecteur quelconque d,

$$(\widehat{a\, b})\, (\widehat{c\, d}) = (ac)\, (bd) - (bc)\, (ad) \ ,$$

c'est-à-dire la formule bien connue pour le produit de deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix} \ .$$

Il en résulte spécialement

$$(\widehat{a\, b})^2 = a^2\, b^2 - (ab)^2$$

ou

$$(\widehat{a\, b})^2 + (ab)^2 = a^2\, b^2 \ .$$