REMARQUES SUR LES POLYGONES ET LEURS ÉTOILÉS

Autor(en): **Bilger, Gérard**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515792

REMARQUES SUR LES POLYGONES ET LEURS ÉTOILÉS

PAR

Gérard Bilger (Genève).

---

1. — M. G. Vivanti, dans un article récent et fort intéressant[1], démontre et généralise quelques théorèmes énoncés par Ch. Sturm et L'Huillier. Quelques-uns concernent la somme des puissances m^{mes} des distances d'un point à tous les côtés d'un polygone régulier ou à toutes les faces d'un polyèdre.

Nous indiquerons ici, sans les démontrer, quelques propositions relatives aux distances d'un point à un certain nombre de côtés des polygones et de leurs étoilés ou à un certain nombre de faces de l'icosaèdre et du dodécaèdre régulier de troisième espèce[2]. Ces théorèmes nous ont été suggérés par *la théorie du potentiel*[3], comme nous l'exposerons ailleurs, mais ils ont une signification strictement géométrique. L'intervention de «lacets» montre leur parenté avec la théorie des fonctions. Une vérification élémentaire s'obtiendrait en montrant que la proposition est vraie pour un lacet entourant l'un des sommets des polygones ou l'une des arêtes des polyèdres.

Soient C un polygone inscrit, convexe, régulier ou semi-régulier équiangle[4]; c_i l'un de ses côtés, $(i = 1, 2, 3, \dots n)$, l son périmètre, S sa surface et C′ l'un quelconque de ses étoilés

---

[1] *L'Enseignement mathématique*, XXXVII^e^ année, 1938, n^os^ 5-6.

[2] Rouché et Comberousse, *Traité de Géométrie*, II, p. 255, fig. 502.

[3] Compte rendu de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève, *Arch. des Sc. phys. et nat.*, n° I, 1937, Des polygones potentiellement équivalents et n° 2, 1937, Potentiel de polygone et Géométrie élémentaire.

[4] Max Brückner, *Vielecke und Vielflache*, p. 16.

dont les sommets et les bissectrices coïncident avec ceux de C; c_i', l' et S′ les éléments de C′ correspondant à c_i, l et S.

A partir d'un point M situé à l'extérieur de C, décrivons un circuit fermé γ quelconque autour d'un ou de plusieurs sommets des polygones (et qui ne passe par aucun sommet). Désignons par d_i et par d_i' la distance du point M aux différentes droites qui supportent les côtés c_i et c_i' franchis lors du circuit. Nous obtenons

$$\frac{\Sigma \pm d_i}{l} = \frac{\Sigma \pm d_i'}{l'}, \tag{1}$$

la distance est comptée positivement dans le sens où l'on a traversé les côtés et négativement dans l'autre; et

$$\frac{\Sigma \pm d_i^2}{S} = \frac{\Sigma \pm d_i'^2}{S'}, \tag{2}$$

les termes de ces sommes sont comptés positivement lorsqu'on entre dans le corps et négativement lorsqu'on en sort.

La formule (1) est encore vraie dans les deux cas suivants:

a) Entre un polygone régulier C (ou C′) et le corps C″ formé par les n rayons du cercle circonscrit aboutissant aux sommets de C; nous obtenons

$$\frac{\Sigma \pm d_i}{l} = \frac{\Sigma \pm d_i''}{l''}, \tag{1'}$$

où d_i'' et l'' représentent les éléments de C″ correspondant à d_i et l.

Pour l'hexagone, $l = l''$.

Il est bien connu qu'un circuit fermé γ quelconque se ramène à une somme de lacets l. Pour le lacet l on a, par exemple,

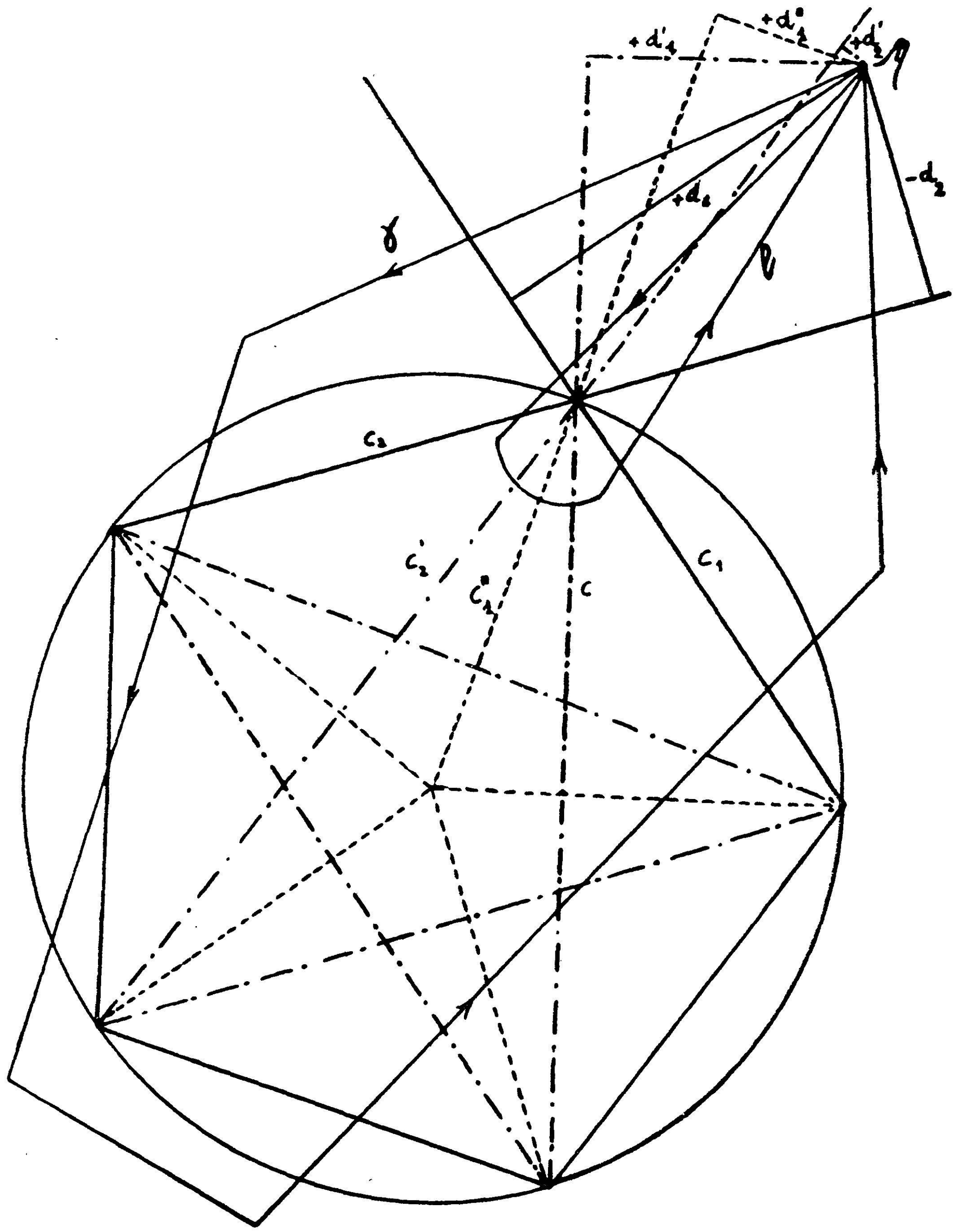
$$\frac{+d_1 - d_2}{l} = \frac{+d_1' + d_2'}{l'} = \frac{+d_1''}{l''}$$

et

$$\frac{d_2^2 - d_1^2}{S} = \frac{d_2'^2 - d_1'^2}{S'}.$$

Remarque. — Décrivons le circuit particulier suivant. A partir de M, entrons dans C par c_i puis tournons autour du point de concours des rayons et retournons en M par c_i. La formule (1′) devient

$$\frac{d_i - d_i}{l} \equiv \frac{\Sigma \pm d_i''}{l''} \qquad \text{d'où} \qquad \Sigma \pm d_i'' \equiv 0 \ .$$



Cette dernière relation est évidente si C″ est pair, les distances d'' se détruisant deux à deux.

b) Entre un polygone semi-régulier équiangle C (ou C′) et le corps C‴ formé par l'ensemble des bissectrices de C (ou de C′)

pour autant qu'une bissectrice quelconque aboutisse à un sommet où elle soit de nouveau bissectrice. La formule (1) devient

$$\frac{\Sigma \pm d_i}{l} = \frac{\Sigma \pm d_i'''}{l'''} . \tag{1''}$$

où d_i''' et l''' représentent les éléments de C''' correspondant à d_i et l.

Pour l'hexagone semi-régulier, $l = l'''$.

2. — Nous considérons les distances à un certain nombre de côtés du polygone et de leurs étoilés. La proposition qui s'applique à tous les côtés, dans le cas de la puissance un, à savoir: « La somme (algébrique) des distances d'un point aux côtés d'un polygone régulier est constante pour tous les points du plan » est évidente en mécanique. Elle exprime que le moment résultant d'un système de forces dont la résultante est nulle est constant.

3. — *Remarque sur le calcul de la surface des polygones.* — Soit O le centre du cercle circonscrit à C (ou à C′), joignons O aux différents sommets de C; nous divisons le polygone en triangles isocèles tous égaux entre eux si C est régulier, égaux deux à deux si C est semi-régulier. Par S′, nous entendons la somme des surfaces de tous ces triangles; il y a donc des régions du polygone recouvertes plusieurs fois; ceci revient à dire que les surfaces recouvertes plusieurs fois sont comptées autant de fois qu'elles sont recouvertes.

D'après cette façon de calculer la surface, à un polygone régulier pair correspond toujours un polygone de même surface y compris lui-même. La même chose pour les polygones semi-réguliers doublement pairs. Dans ce cas, la formule (2) s'écrit:

$$\Sigma \pm d_i^2 = \Sigma \pm d_i'^2 .$$

Soient C et C′ deux polygones pour lesquels S = S′; désignons par s_i la surface de C recouverte i fois; par s_i' celle de C′, nous obtenons

$$\Sigma\, i s_i = \Sigma\, i' s_i' .$$

La plus grande valeur de i dépend de la forme du polygone; elle n'est pas forcément égale à celle de i'.

4. — Appliquée à un lacet autour d'un sommet, la formule (1) implique la proposition suivante vraie pour les polygones réguliers et semi-réguliers : La perpendiculaire élevée en un point d'une bissectrice issue d'un sommet quelconque détermine sur les côtés du polygone et de ses étoilés des longueurs inversement proportionnelles aux périmètres. Réciproquement, si deux polygones satisfont à cette condition, ils ont même potentiel dans le domaine connexe du point à l'infini.

5. — *Proposition analogue pour deux polyèdres dans l'espace.* — Soient C l'icosaèdre régulier situé à distance finie ; f_i l'une de ses faces, S sa surface, V son volume et C′ le dodécaèdre régulier de troisième espèce dont les arêtes coïncident avec celles de C, f'_i, S′ et V′ les éléments de C′ correspondant à f_i, S et V. A partir d'un point M extérieur à C, décrivons un circuit fermé quelconque, autour d'une ou de plusieurs arêtes des polyèdres, qui évite les sommets. Désignons par d_i et d'_i la distance qui va du point M aux différents plans qui supportent les faces f_i et f'_i franchies lors du circuit.

Nous obtenons

$$\frac{\Sigma \pm d_i}{S} = \frac{\Sigma \pm d'_i}{S'}, \tag{1}$$

les distances sont comptées positivement dans le sens où l'on a traversé et négativement dans l'autre ; et

$$\frac{\Sigma \pm d_i^2}{V} = \frac{\Sigma \pm d_i'^2}{V'}, \tag{2}$$

les termes de ces sommes sont comptés positivement lorsqu'on entre dans le corps et négativement lorsqu'on en sort.

6. — *Remarque sur le calcul du volume* V′. — Joignons le point O, centre de la sphère circonscrite au polyèdre, aux différents sommets de toutes les faces ; nous divisons ainsi le polyèdre en douze pyramides à base pentagonale. Par volume du polyèdre, nous entendons la somme des volumes de ces douze pyramides ; il y a donc des régions du polyèdre qui appartiennent à plusieurs pyramides.