ADDENDA

Si l'on veut calculer $|\mathbf{k}|$, la méthode de décomposition s'y prête parfaitement, parce que

$$|\mathbf{k}| = (g_{11}\, g_{22} \dots g_{mm})\,(h_{11}\, h_{22} \dots h_{mm}) \,. \tag{13}$$

§ 7. — *Remarque finale.* — Le lecteur demandera peut-être pourquoi nous n'avons pas employé les matrices dont l'algèbre est pourtant plus simple. Ce n'est pas ici le lieu de discuter les différents avantages et désavantages relatifs des matrices et des cracoviens, mais l'essentiel c'est la grande facilité des calculs effectifs, tant numériques que littéraux, des produits des cracoviens, grâce à la conformité de ces opérations fondamentales au principe de la juxtaposition des éléments correspondants. La difficulté presque prohibitive de pareils calculs avec les matrices semble avoir retardé sensiblement l'emploi tellement utile des nombres tabulaires dans les différents domaines des Mathématiques.

Cracovie, mars 1941.

ADDENDA

Dans le laps du temps de sept années qui durent s'écouler, par suite de la guerre, entre la composition et l'impression de cet article, l'auteur a développé différents résultats ci-dessus.

La supposition (p. 4) que les équations soient spécialement arrangées et puissent être résolues univoquement n'est point nécessaire, parce que la solution s'applique dans le cas le plus général de n équations à m inconnues. Il suffit de chercher la décomposition du $\mathbf{k}$ en un produit de deux facteurs « élémentaires ». Un cracovien est *élémentaire* si dans chacune de ses lignes « s'éteint » au moins un colonne, et l'on dit qu'une colonne d'un cracovien *s'éteint* dans la ligne s, si l'élément de cette colonne dans la ligne s est différent de zéro, les éléments suivants dans cette colonne étant zéros ou n'existant pas (si la ligne est la dernière).

On démontre facilement le théorème (fondamental) que chaque cracovien $\mathbf{k}$ (carré ou non) non zéro peut être décomposé en un produit $\mathbf{k} = \mathbf{g} \,.\, \mathbf{h}$ de deux cracoviens élémentaires $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$.

Le nombre de pareilles décompositions peut être très grand (sans compter le facteur banal de proportionnalité), mais le nombre r de lignes du **g** et **h** est le même pour toutes ces décompositions: c'est *le rang* du **k**. On a dès lors une méthode très simple de la détermination de ce qu'on appelle le rang d'une matrice.

Avec la nouvelle définition du quotient (§ 1, fin du passage 4), en posant

$$\{\mathbf{k}\,\mathbf{l}\} = \mathbf{g}'.\,\mathbf{h}\ ,\quad \mathbf{x}' = \tau\{x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ x^m\,,\ -1\}\ ,$$

la solution (8) se simplifie encore et devient

$$\mathbf{x}' = \mathbf{0} : \mathbf{g}' \tag{8*}$$

$\mathbf{x}'$ existe si **g** et $\mathbf{g}'$ sont du même rang, c'est-à-dire ont le même nombre de lignes, et n'existe pas dans le cas contraire. La solution, quand elle existe, a $m - r + 1$ degrés de liberté.

On évite ainsi complètement l'emploi des déterminants dans la résolution numérique d'équations linéaires arbitraires, ainsi que dans la détermination du rang d'un tableau.

Quant à la propagation non astronomique des cracoviens, notons que le Conseil national de l'Office central des mesures du pays en Pologne les a recommandés, en 1946 et 1947, pour les calculs géodésiques, et ils sont enseignés maintenant brièvement dans les principales écoles polytechniques de Pologne. Dans son *Algèbre nucléaire* (non publiée), M. T. Kochmański (Cracovie) donne une application importante des cracoviens aux calculs des séries; le même auteur publia entre autres plusieurs exposés didactiques. A Varsovie, M. S. Husbrandt, de la Polytechnique, les applique aux divers problèmes du calcul numérique (nombreux manuscrits photocopiés). Le livre *Scienza delle Costruzioni*, vol. 2, Bologne 1946, de M. Odone Belluzzi, pp. 287-298, enseigne l'emploi des cracoviens dans la résolution des équations linéaires. M. W. Sierpiński en parle dans plusieurs endroits de ses *Fondements d'Algèbre supérieure*, Varsovie 1946 (en polonais).

Cracovie, juillet 1948.

T. Banachiewicz.