# LES COURBES PLANES A NORMALES DOUBLES

Autor(en): **Vivanti, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1942-1950)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515796

# LES COURBES PLANES A NORMALES DOUBLES

PAR

† G. Vivanti (Milan).

Je me propose de déterminer par une méthode directe et simple la nature géométrique et la représentation analytique des courbes planes possédant une infinité continue de normales doubles, auxquelles M. G. Loria a consacré quelques pages de son mémoire: « La courbe catoptrique d'Euler » (*Ens. math.*, t. 38, pp. 250-275).

Je désignerai par (M) la ligne engendrée par le point variable M.

Soit PQ une normale double d'une courbe à normales doubles autre que le cercle, et R son point d'intersection avec la normale double infiniment voisine; R sera le centre de courbure commun des courbes (P) et (Q) aux points respectifs P et Q, et la ligne (R) (qui se réduirait à un point si la courbe donnée était un cercle) sera la développée commune de ces courbes. Les courbes (P) et (Q) étant deux développantes d'une même courbe seront, comme on sait deux courbes parallèles. Donc: *Toute courbe à normales doubles est l'ensemble de deux lignes parallèles.*

Soit O le point milieu de PQ; la ligne (O) sera une troisième développante de (R) et sera parallèle à (P) et à (Q) et située à égale distance de ces deux courbes. Inversement, étant donné une courbe *quelconque* (O), on en déduit une courbe à normales doubles en menant de chacun de ses points, de part et d'autre, une normale de longueur fixe. Cela nous donne le moyen d'obtenir la représentation analytique générale des courbes à normales doubles.

Soit $y = f(x)$ l'équation cartésienne de la courbe (O), et cherchons ses équations paramétriques en prenant comme paramètre le coefficient angulaire $p = \dfrac{dx}{dy}$ de la normale.

Posons

$$y = \varphi(p) ;$$

il s'ensuit

$$dx = -p\varphi'(p)\,dp ,$$

et les équations cherchées sont

$$x = -\int p \, . \, \varphi'(p)\,dp , \qquad y = \varphi(p) ,$$

où $\varphi(p)$ est une fonction quelconque. Pour éviter le signe d'intégration, posons

$$\varphi(p) = \varpi'(p) ;$$

d'où

$$x = -\int p\varpi''(p)\,dp = \varpi(p) - p\varpi'(p) ,$$

et les équations de la courbe deviennent

$$x = \varpi(p) - p\varpi'(p) , \qquad y = \varpi'(p) , \qquad (\alpha)$$

où $\varpi(p)$ est une fonction quelconque. Le sinus et le cosinus de l'angle de la normale avec l'axe des $x$ sont respectivement

$$\pm \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \qquad \text{et} \qquad \pm \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} ;$$

on a donc pour les coordonnées des points P et Q, en posant PQ $= 2c$

$$x = \varpi(p) - p\varpi'(p) + \frac{c}{\sqrt{p^2+1}} , \qquad y = \varpi'(p) + \frac{cp}{\sqrt{p^2+1}}$$

et

$$x = \varpi(p) - p\varpi'(p) - \frac{c}{\sqrt{p^2+1}} , \qquad y = \varpi'(p) - \frac{cp}{\sqrt{p^2+1}} ,$$

qu'on peut remplacer par le système unique $(\alpha)$, pourvu qu'on y change la fonction $\varpi(p)$ en $\varpi(p) \pm c\sqrt{p^2+1}$. Notre but est ainsi complètement atteint.

*Remarques.* — Le résultat obtenu pour la forme des courbes à normales doubles pourrait faire croire qu'il n'est pas possible que l'une de ces courbes soit formée d'un seul trait. Mais il faut considérer que la correspondance par parallélisme entre deux courbes (à différence de celle entre deux droites) peut être *directe* ou *inverse*, suivant que les points correspondants se succèdent ou non dans le même sens sur les deux courbes. Or, dans le second cas, et si les courbes sont bornées, il peut arriver qu'elles se rejoignent par les deux bouts et forment une courbe fermée unique.

Un exemple nous est fourni par le cercle. Si AC et BD sont deux diamètres perpendiculaires d'un cercle de rayon $r$, les deux demi-cercles ABC et CDA qui se trouvent en correspondance par parallélisme inverse, forment ensemble une courbe fermée à normales doubles à distance constante $2r$. Mais ce n'est pas le seul cas; on peut en former autant qu'on en veut. Prenons par exemple une demi-ellipse ABC de base AC, et menons de chacun de ses points P, du côté de la concavité, une normale PQ de longueur égale à AC; le lieu des points Q se rattache par ses bouts A et C à la demi-ellipse, et forme avec elle une courbe fermée à normales doubles; voici encore un exemple assez général. Si la fonction $\varpi(p)$ est rationnelle, finie pour toute valeur réelle finie de $p$ et nulle pour $p = \pm\infty$, (par exemple $\frac{1}{(p^n + a)^n}$, $a > 0$, $n > 0$ et entier), les fonctions $\varpi'(p)$ et $\varpi(p) - p\varpi'(p)$ ont ces mêmes caractères; et les courbes (P) et (Q) se rattachent aux points $x = 0$, $y = \pm c$.

Soit $x = g(y)$ est l'équation de la courbe (O) résolue par rapport à $x$; en introduisant dans cette équation les expressions ($\alpha$) de $x$ et de $y$, on obtient

$$\varpi(p) - p\varpi'(p) = g\left[\varpi'(p)\right],$$

ou

$$\varpi(p) = p \,.\, \varpi'(p) + g\left[\varpi'(p)\right],$$

ce qui montre que la fonction $\varpi(p)$ doit être l'intégrale (singulière) d'une équation de Clairaut. On pourrait croire que cela apporte une restriction dans le choix de la fonction $\varpi(p)$, mais ce n'est pas le cas: toute fonction (ordinaire) est l'intégrale singulière d'une équation de Clairaut, convenablement choisie, parce que toute courbe plane (ordinaire) peut être envisagée comme l'enveloppe de ses tangentes.

On peut démontrer directement que *si deux courbes ont toutes les normales communes, la longueur de ces normales est constante*, résultat auquel nous sommes déjà parvenus par une autre voie.

Soient $(x, y)$ et $(X, Y)$ deux points correspondants des deux courbes, et rapportons la première d'elles à son arc $s$ comme paramètre. Désignant par un accent la dérivation par rapport à $s$, on a notoirement:

$$x'^2 + y'^2 = 1 \;, \qquad x'x'' + y'y'' = 0 \;;$$

$x'$ et $-y'$ sont respectivement le sinus et le cosinus de l'une des directions de la normale. Si donc $n$ (fonction de $s$) est la longueur de la normale comprise entre les deux courbes, on a

$$X = x - ny' \;, \qquad Y = y + nx' \;,$$

et en dérivant

$$X' = x' - n'y' - ny'' \;, \qquad Y' = y' + n'x' + nx'' \;.$$

Or, les tangentes aux deux courbes aux points correspondants étant parallèles, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} \;, \qquad \text{ou} \qquad \frac{y'}{x'} = \frac{Y'}{X'} \;, \tag{$\beta$}$$

et, introduisant les expressions trouvées pour $X'$ et $Y'$, on obtient

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y' + n'x' + nx''}{x' - n'y' - ny''} \;,$$

d'où

$$n \,.\, (x'x'' + y'y'') + n'(x'^2 + y'^2) = 0 \;, \qquad \text{ou} \qquad n' = 0 \;.$$

La longueur de la normale est donc constante.

Réciproquement, si $n' = 0$, on a la relation ($\beta$), c'est-à-dire: *si la normale à l'une des courbes a une longueur constante; elle est normale aussi à l'autre courbe.*

(15 mai 1943)

---