

# SUR LE TÉTRAÈDRE DONT LES ARÊTES OPPOSÉES SONT DEUX A DEUX ÉGALES

Autor(en): **Thébault, V.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1942-1950)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515797>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LE TÉTRAÈDRE DONT LES ARÊTES OPPOSÉES SONT DEUX A DEUX ÉGALES

PAR

V. THÉBAULT, Tennie (Sarthe).

Le tétraèdre dont les arêtes opposées sont deux à deux égales, appelé tétraèdre *isocèle* ou encore tétraèdre *équifacial*, est depuis longtemps connu. Il a été signalé dans les *Annales de Gergonne* dès 1810; depuis, plusieurs géomètres, parmi lesquels J. Neuberg et E. Lemoine, ont donné de ce solide un grand nombre de propriétés intéressantes dont la plupart ont été réunies et complétées par J. Lemaire, dans une note à la suite de la solution qu'il a donnée de la question de Mathématiques élémentaires posée au Concours d'Agrégation des Sciences mathématiques, Paris, 1914<sup>1</sup>. Voici quelques théorèmes, peut-être inédits, qu'il y a lieu d'ajouter aux propriétés déjà mentionnées. Ils nous ont été suggérés par l'étude de tétraèdres spéciaux que nous signalerons en terminant.

1. — La propriété fondamentale d'un tétraèdre ABCD dont les arêtes opposées sont deux à deux égales est de pouvoir coïncider avec lui-même par une rotation d'un demi-tour autour

---

<sup>1</sup> Voici une bibliographie peut-être incomplète: *Annales de Gergonne*, vers 1810. — E. LEMOINE, *A.F.A.S.*, 1875; *N.A.*, 1880, 133 et 403. — J. NEUBERG, *N.C.*, t. II, 144; *B.B.*, 1884 (Mémoire sur le tétraèdre). — *Archives de Grünert*, t. LVII; *N.A.*, 1880, 403; GENTY, *N.A.*, 1878, 223. — A. VACQUANT, *J.V.*, 22<sup>me</sup> année, pp. 29 et 49. — A. DURAND et A. VACQUANT, *J.V.*, 35<sup>me</sup> année, p. 152. — J. LEMAIRE, *N.A.*, 1914, pp. 502 à 505. — V. THÉBAULT, *L'Education mathématique*, 25<sup>me</sup> année, pp. 1 à 3.

ABRÉVIATIONS. — *N.A.*: *Nouvelles Annales de Mathématiques*; *N.C.*: *Nouvelle Correspondance mathématique*; *J.V.*: *Journal de Vuibert*; *A.F.A.S.*: *Comptes rendus de l'Association française pour l'Avancement des Sciences*; *B.B.*: *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*.

d'une quelconque des trois droites EF, KL, MN qui joignent les milieux des arêtes BC et DA, CA et DB, AB et DC. O étant le point de concours des droites EF, KL, MN, il s'ensuit que <sup>1</sup>:

*Les dièdres opposés, qui peuvent coïncider par une rotation, sont égaux.*

*Le point O, équidistant des quatre faces, des quatre sommets du tétraèdre, est le centre commun de la sphère inscrite et de la sphère circonscrite, en même temps qu'il est le centre de gravité.*

2. — THÉORÈME I. — *Le tétraèdre A'B'C'D' dont les sommets sont les points de contact de la sphère inscrite avec les faces du tétraèdre isocèle ABCD est aussi isocèle.*

Les points A', B', C', D' des contacts de la sphère inscrite (I), de centre I et de rayon  $r$ , coïncident avec les centres des cercles circonscrits aux faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre fondamental. Par un demi-tour autour de l'axe MN, par exemple, les points A et B prennent la place l'un de l'autre, ainsi que les points D et C. La face ABC vient donc sur DAB et le centre D' du cercle circonscrit au triangle ABC s'échange avec le point C', centre du cercle DAB.

Dès lors, le tétraèdre A'B'C'D' possède aussi la propriété de coïncider avec lui-même par un demi-tour autour de MN ou de EF et KL. Ce tétraèdre est donc isocèle; le centre de gravité qui est en même temps le centre de la sphère circonscrite et de la sphère inscrite, est le point commun des trois axes; il est le même que celui du tétraèdre ABCD.

*Remarque.* — La même propriété a lieu pour tout tétraèdre déduit d'un tétraèdre isocèle en prenant pour sommets quatre points, un de chaque face, ayant même définition.

3. — THÉORÈME II. — *Dans un tétraèdre isocèle, la somme des cosinus des dièdres différents est égale à l'unité.*

*Première démonstration* <sup>2</sup>. — Si  $a$  et  $a'$ ,  $b$  et  $b'$ ,  $c$  et  $c'$  désignent les angles dièdres suivant les arêtes BC et DA, CA et DB, AB

<sup>1</sup> Cf. V. THÉBAULT, *loc. cit.*

<sup>2</sup> E. LEMOINE, N.A., 1880, *loc. cit.*

et DC, en écrivant que la somme des projections de trois faces du tétraèdre ABCD sur la quatrième est égale à cette quatrième, on a

$$\begin{aligned} 1 &= \cos a' + \cos b' + \cos c' , \\ 1 &= \cos a + \cos b + \cos c' , \\ 1 &= \cos b + \cos c + \cos a' , \\ 1 &= \cos c + \cos a + \cos b' . \end{aligned} \tag{1}$$

Réciproquement, ajoutons ensemble les deux premières de ces équations, puis les deux dernières; retranchons ces deux sommes l'une de l'autre, et divisons par 2, il vient

$$0 = \cos c' - \cos c ;$$

d'où, *sans ambiguïté*,  $c = c'$ . On aurait de même  $a = a'$ ,  $b = b'$ .

*Seconde démonstration.* — Les suppléments des dièdres  $a$  et  $a'$ ,  $b$  et  $b'$ ,  $c$  et  $c'$ , sont les angles  $D'OA'$  et  $B'OC'$ ,  $DOB'$  et  $C'OC'$  et  $A'OB'$ . Il en résulte que, et par analogie,

$$\begin{aligned} \overline{D'A'}^2 &= \overline{OA'}^2 + \overline{OD'}^2 - 2OA' \cdot OD' \cos (\pi - a) = 2r^2 (1 + \cos a) , \\ \overline{D'B'}^2 &= 2r^2 (1 + \cos b) , \quad \overline{D'C'}^2 = 2r^2 (1 + \cos c) ; \end{aligned} \tag{2}$$

d'où

$$(\cos a + \cos b + \cos c) = -3 + \frac{1}{2r^2} \cdot (\overline{D'A'}^2 + \overline{D'B'}^2 + \overline{D'C'}^2) . \tag{3}$$

Or, le point O étant le centre de gravité du tétraèdre isocèle  $A'B'C'D'$ , d'après une propriété classique, on a les relations

$$\begin{aligned} \Sigma (\overline{B'C'}^2 + \overline{D'A'}^2) &= 2 (\overline{D'A'}^2 + \overline{D'B'}^2 + \overline{D'C'}^2) = \\ &= 4 (\overline{OA'}^2 + \overline{OB'}^2 + \overline{OC'}^2 + \overline{OD'}^2) = 16r^2 , \end{aligned} \tag{4}$$

qui, introduites dans (3) donnent, en définitive, l'égalité

$$\cos a + \cos b + \cos c = 1 ,$$

dans laquelle les lettres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  peuvent être remplacées en partie ou en totalité par  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ .

Réciproquement, si l'on a, par hypothèse,

$$\begin{aligned} 1 &= \cos a + \cos b + \cos c = \cos a + \cos b' + \cos c' = \\ &= \cos b + \cos c' + \cos a' = \cos c + \cos a' + \cos b' , \end{aligned}$$

il vient, en vertu de la relation (3) et de ses trois analogues,

$$\Sigma (\overline{B'C'}^2 + \overline{D'A'}^2) = 16r^2 ,$$

et le tétraèdre  $A'B'C'D'$  est isocèle ainsi que le tétraèdre  $ABCD$  <sup>1</sup>.

*Troisième démonstration.* — Soient  $\delta$  et  $\delta'$  les pieds de la hauteur  $D\delta$  du tétraèdre  $ABCD$  et de la hauteur  $D\delta'$  du triangle  $BCD$ . On sait que le point  $\delta$  coïncide avec le symétrique de l'orthocentre  $H$  du triangle  $ABC$ , par rapport au centre du cercle circonscrit à ce triangle <sup>2</sup>. Comme la droite  $\delta\delta'$  est perpendiculaire au côté  $BC$  et que les coordonnées normales absolues du point  $\delta$  dans le triangle  $ABC$  sont

$$\begin{aligned} 2R (\cos A - \cos B \cos C) , \quad 2R (\cos B - \cos C \cos A) , \\ 2R (\cos C - \cos A \cos B) , \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \cos D\delta'\delta = \cos a = \delta\delta' : D\delta' &= [2R (\cos A - \cos B \cos C)] : \frac{2S}{a} = \\ &= \frac{2R^2}{S} \cdot \sin A (\cos A - \cos B \cos C) , \end{aligned}$$

$S$  étant l'aire et  $R$  le rayon du cercle circonscrit de chacune des faces du tétraèdre  $ABCD$ ,  $a$  désignant ici la longueur du côté  $BC$  du triangle  $ABC$ . Des formules analogues pour  $\cos b$ ,  $\cos c$  s'obtiennent par des permutations circulaires, convenables de  $\sin A$ ,  $\sin B$ ,  $\sin C$  et  $\cos A$ ,  $\cos B$ ,  $\cos C$ . Finalement, on a

$$\begin{aligned} \cos a + \cos b + \cos c &= \frac{2R^2}{S} \cdot \Sigma \sin A (\cos A - \cos B \cos C) = \\ &= \frac{2R^2}{S} \cdot \sin A \sin B \sin C = 1 . \end{aligned}$$

Le théorème est donc démontré.

<sup>1</sup> V. THÉBAULT, *N.A.*, 1919, 426.

<sup>2</sup> Cf. V. THÉBAULT, *L'Education mathématique*, loc. cit.

*Remarques.* — 1<sup>o</sup> Les conditions (1), par exemple, exigent que les six dièdres soient aigus ou que deux d'entre eux, au plus, soient droits ou obtus, car si l'on avait à la fois, en particulier,  $\cos b < 0$  et  $\cos c < 0$ , on aurait  $\cos a' > 1$ , ce qui est absurde.

Dès lors, *le tétraèdre isocèle contient au plus deux dièdres droits ou deux dièdres obtus.*

2<sup>o</sup> Pour que deux dièdres opposés,  $a$  et  $a'$  par exemple, soient droits, il faut et il suffit que le pied  $\delta$  de la hauteur  $D\delta$  du tétraèdre ABCD soit sur l'arête BC, autrement dit que le symétrique  $\delta$  de l'orthocentre du triangle ABC, par rapport au centre du cercle circonscrit, soit sur BC.

Dans ce triangle spécial ABC, dont les angles sont tous aigus, l'orthocentre H est au milieu de la hauteur  $AA'' = h_a$  relative au côté BC, et l'on y rencontre les relations suivantes entre les éléments habituels :

$$\begin{aligned} \cos A &= \cos B \cos C = \frac{1}{2} \sin B \sin C, & \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C &= 2; \\ \operatorname{tg} A &= \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C; & 2a^2 &= r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2, & b^2 + c^2 &= a^2 + h_a^2. \end{aligned}$$

Pour construire ce triangle ABC, il suffit de tracer une corde  $AA_1$  d'un cercle donné et de mener la corde BC perpendiculairement à  $AA_1$  en un point  $A_2$  tel que  $A_2 A_1 = \frac{1}{3} AA_1$ .

Les hauteurs du tétraèdre isocèle particulier ABCD envisagé ici, sont égales à la hauteur  $AA''$  de la face ABC; le rayon de la sphère inscrite est égal à la distance du centre du cercle circonscrit au triangle ABC au côté BC, c'est-à-dire à  $\frac{1}{4} h_a$  et les rayons des quatre sphères égales exinscrites au tétraèdre ont pour longueur commune  $AH = \frac{1}{2} h_a$ . Enfin, les arêtes BC et DA des dièdres droits font entre elles un angle  $\omega$  tel que

$$\sin \omega = 2\sqrt{2} \cot A.$$

4. — THÉORÈME III. — *Dans un tétraèdre isocèle, le tétraèdre dont les sommets sont les points de contact de l'une des sphères exinscrites avec les plans des faces, est trirectangle.*

Soient  $A_d, B_d, C_d, D_d$  les points de contact de la sphère  $(I_d)$ , de rayon  $r_d$ , exinscrite au tétraèdre isocèle ABCD dans le trièdre

tronqué opposé au sommet D. On a d'abord, avec les relations

$$\overline{B_d C_d}^2 = 2r_d^2 (1 + \cos a') , \quad \overline{D_d A_d}^2 = 2r_d^2 \cdot [1 + \cos a] ,$$

qui s'obtiennent comme les égalités (2),

$$\overline{B_d C_d}^2 + \overline{D_d A_d}^2 = 4r_d^2 = \overline{C_d A_d}^2 + \overline{D_d B_d}^2 = \overline{A_d B_d}^2 + \overline{D_d C_d}^2 .$$

De plus, en vertu de (1'),

$$\overline{B_d C_d}^2 = \overline{D_d B_d}^2 + \overline{D_d C_d}^2 , \quad \overline{C_d A_d}^2 = \overline{D_d C_d}^2 + \overline{D_d A_d}^2 ,$$

$$\overline{A_d B_d}^2 = \overline{D_d A_d}^2 + \overline{D_d B_d}^2 ,$$

car

$$2r_d^2 (1 + \cos a') = 2r_d^2 (1 - \cos b) + 2r_d^2 (1 - \cos c) ,$$

en raison de ce que

$$1 = \cos b + \cos c + \cos a' .$$

Le théorème est donc démontré, quelle que soit la sphère exinscrite considérée.

*Remarques.* — Le tétraèdre  $A_d B_d C_d D_d$  est trirectangle au point  $D_d$  qui coïncide avec l'orthocentre H du triangle ABC. De même les tétraèdres  $A_a B_a C_a D_a$ ,  $A_b B_b C_b D_b$ ,  $A_c B_c C_c D_c$  correspondant aux centres  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  des autres sphères exinscrites, de rayons  $r_a = r_b = r_c = r_d = 2r$ , sont trirectangles en les orthocentres des faces BCD, CDA, DAB, du tétraèdre fondamental. L'égalité des sphères  $(I_a)$ ,  $(I_b)$ ,  $(I_c)$ ,  $(I_d)$  entraîne celle des quatre tétraèdres  $A_i B_i C_i D_i$  ( $i = a, b, c, d$ ).

5. — THÉORÈME IV. — *Les droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre isocèle ABCD aux centres  $A_1, B_1, C_1, D_1$  des cercles circonscrits aux faces opposées sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde et réciproquement. Elles sont concourantes si le tétraèdre est régulier et réciproquement.*

En effet, les droites EF, KL, MN sont des axes de symétrie du tétraèdre et forment un trièdre trirectangle  $Gxyz$  dont le

sommet est le centre de gravité du tétraèdre. Les triangles ABC, DCB, CAD, BAD sont égaux et sont symétriques deux à deux, par rapport aux arêtes du trièdre  $Gxyz$ . Si une droite  $d$  issue du sommet D coupe la face opposée en un point  $D_2$ , ses symétriques  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$ , par rapport aux droites  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$ , passent par les sommets A, B, C et coupent les faces opposées aux points homologues  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  du point  $D_2$ . Quand la droite  $d$  rencontre les faces du trièdre  $Gxyz$  en des points *extérieurs* aux arêtes et situés à distance finie<sup>1</sup>, ce qui est en général le cas de la droite  $d \equiv DD_1$ , il en est de même des droites  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$  et les quatre droites sont gauches deux à deux. Il existe au moins une droite  $u$ , gauche aux droites  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$ , parallèle au plan  $Gxy$  et sécante aux droites  $(a)$ ,  $d$ ,  $Gz$ ; les droites  $(b)$ ,  $(c)$  étant les symétriques des droites  $d$ ,  $(a)$ , par rapport à l'axe  $Gz$ , la droite  $u$  les coupe également; de même, il existe des droites  $\nu$ ,  $\omega$ , parallèles aux plans  $Gyz$ ,  $Gxz$  et sécantes aux droites  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$ ,  $(d)$ ; celles-ci ayant ainsi plus de deux sécantes communes non parallèles à un même plan, sont donc sur un même hyperboloïde et, en outre, les axes de celui-ci se confondent avec les arêtes du tétraèdre  $Gxyz$ .

Lorsque le tétraèdre ABCD est régulier, il est clair que les droites  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  sont concourantes.

Réciproquement, si  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  sont des points situés dans les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC, tels que les droites  $AA_2$ ,  $BB_2$ ,  $CC_2$ ,  $DD_2$  soient hyperboloïdiques, il existe une quadrique (Q) tangente aux faces du tétraèdre aux points  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$ . Si le tétraèdre  $A_2 B_2 C_2 D_2$  est un tétraèdre podaire du tétraèdre ABCD, donc orthologique à celui-ci, les arêtes opposées AB et  $C_2 D_2$ , BC et  $A_2 B_2$ , ..., sont orthogonales. Or ces arêtes sont des droites polaires par rapport à (Q) et, par suite, leurs points à l'infini sont conjugués par rapport à la conique à l'infini de (Q). Comme il suffit de cinq couples de points conjugués pour déterminer une conique, la conique à

<sup>1</sup> Si la droite  $d$  coupe l'une des arêtes ou est parallèle à l'une des faces du trièdre  $Gxyz$ , les droites qui joignent les sommets aux centres de gravité ou à des sommets homologues des triangles anticomplémentaires des faces opposées sont concourantes, ou les droites joignant les sommets à des points homologues des médianes ou des côtés des triangles anticomplémentaires des faces opposées se confondent ou se coupent par paires en des points distincts. (Propriétés connues.)



l'infini de (Q) n'est autre que l'ombilicale et (Q) est une sphère. Donc, les seuls tétraèdres podaires du tétraèdre ABCD tels que les droites  $AA_2, BB_2, CC_2, DD_2$  soient hyperboloïdiques sont ceux qui correspondent aux centres des sphères tangentes aux quatre plans des faces du tétraèdre ABCD. (Réciproque d'une propriété connue).

Si  $A_2 \equiv A_1, B_2 \equiv B_1, C_2 \equiv C_1, D_2 \equiv D_1$ , le tétraèdre  $A_2 B_2 C_2 D_2 \equiv A_1 B_1 C_1 D_1$  se confond avec le tétraèdre podaire du centre O de la sphère ABCD. D'après ce qui précède, le point O coïncide avec le centre de la sphère inscrite au tétraèdre ABCD qui est isocèle.

Si maintenant les droites  $AA_2 \equiv AA_1, BB_2 \equiv BB_1$  se coupent en un point P, les droites  $AB_2 \equiv AB_1$  et  $BA_2 \equiv BA_1$  couperont l'arête CD au même point X, intersection de cette droite avec le plan ABP. Or, si l'on rabat l'un des triangles CDA, BCD sur le plan de l'autre autour de CD, de façon que les points A et B soient du même côté de CD, les deux triangles seront symétriques l'un de l'autre par rapport à la médiatrice de CD puisque le tétraèdre ABCD est isocèle; par suite le point X coïncide avec le milieu de CD. Comme les points  $A_2 \equiv A_1, B_2 \equiv B_1$  sont également sur cette médiatrice, les droites  $XA_2 \equiv XA_1, XB_2 \equiv XB_1$  se confondent avec elle et les triangles BCD, CDA sont isocèles. En répétant le même raisonnement à d'autres faces, on voit que le tétraèdre isocèle ABCD envisagé dans cette hypothèse est régulier.

6. — Dans un tétraèdre *quelconque* ABCD où l'on désigne suivant l'usage par  $a, b, c, a', b', c'$  les arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC et les dièdres correspondants, par I et  $I_1, I_2, I_3$  les centres des sphères inscrite et des combles BC, CA, AB, par  $I_a, I_b, I_c, I_d$  les centres des sphères exinscrites dans les trièdres tronqués opposés aux sommets A, B, C, D, par  $A', B', C', D'$  les contacts de la sphère (I) et par  $A'', B'', C'', D''$  les contacts de chacune des sphères  $(I_a), (I_b), (I_c), (I_d)$  à l'intérieur des faces BCD, CDA, DAB, ABC, trois hyperboloïdes  $(H_1), (H_2), (H_3)$  passent respectivement par les hauteurs  $(AA_h, BB_h, CC_h, DD_h)$ , par les droites  $(AA', BB', CC', DD')$  et par les droites  $(AA'', BB'', CC'', DD'')$ . Leurs équations en coordonnées tétraédriques sont

successivement

$$(H_1) \quad \Sigma (yz \cos a + xw \cos a') (\cos b \cos b' - \cos c \cos c') = 0 ,$$

$$(H_2) \quad \Sigma \left( yz \cos^2 \frac{a}{2} + xw \cos^2 \frac{a'}{2} \right) \left( \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{b'}{2} - \cos^2 \frac{c}{2} \cos^2 \frac{c'}{2} \right) = 0 ,$$

$$(H_3) \quad \Sigma \left( yz \sin^2 \frac{a}{2} + xw \sin^2 \frac{a'}{2} \right) \left( \sin^2 \frac{b}{2} \sin^2 \frac{b'}{2} - \sin^2 \frac{c}{2} \sin^2 \frac{c'}{2} \right) = 0 .$$

En vertu de ces équations, si l'on a:

$$1^{\circ} \quad \cos a + \cos a' = \cos b + \cos b' = \cos c + \cos c' , \quad (5)$$

le centre I de la sphère inscrite au tétraèdre fondamental est sur chacun des hyperboloïdes  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_3)$ .

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \quad \cos a + \cos a' &= -(\cos b + \cos b') = -(\cos c + \cos c') , \\ \cos b + \cos b' &= -(\cos c + \cos c') = -(\cos a + \cos a') , \\ \cos c + \cos c' &= -(\cos a + \cos a') = -(\cos b + \cos b') , \end{aligned} \quad (6)$$

chacun des centres  $I_1, I_2, I_3$  des sphères des combles est successivement sur l'hyperboloïde  $(H_1)$ .

$$\begin{aligned} 3^{\circ} \quad \cos a - \cos a' &= -(\cos b - \cos b') = -(\cos c - \cos c') , \\ \cos b - \cos b' &= -(\cos c - \cos c') = -(\cos a - \cos a') , \\ \cos c - \cos c' &= -(\cos a - \cos a') = -(\cos b - \cos b') , \\ \cos a - \cos a' &= \cos b - \cos b' = \cos c - \cos c' , \end{aligned} \quad (7)$$

chacun des centres  $I_a, I_b, I_c, I_d$  des sphères exinscrites dans les trièdres tronqués est successivement sur chacun des hyperboloïdes  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_3)$ .

*Remarques.* — 1<sup>o</sup> Les quadriques  $(H_2)$  et  $(H_3)$  ne passent jamais par le centre de l'une des sphères des combles.

2<sup>o</sup> Il résulte des conditions (7) que, dans un tétraèdre isocèle ABCD, les centres des quatre sphères exinscrites dans les trièdres tronqués sont sur l'hyperboloïde des hauteurs (en même temps que sur la sphère circonscrite).

7. — Si l'on désigne par  $r$  le rayon de la sphère inscrite au tétraèdre spécial assujetti aux conditions (5)<sup>1</sup>, on a

$$\overline{D'A'}^2 = 2r^2(1 + \cos a) , \quad \overline{B'C'}^2 = 2r^2(1 + \cos a') ,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \overline{D'A'}^2 + \overline{B'C'}^2 &= 2r^2(2 + \cos a + \cos a') = 2r^2(2 + \cos b + \cos b') = \\ &= 2r^2(2 + \cos c + \cos c') = \overline{D'B'}^2 + \overline{C'A'}^2 = \overline{D'C'}^2 + \overline{A'B'}^2 , \end{aligned}$$

et réciproquement.

Dans les tétraèdres particuliers ABCD assujettis à l'une des conditions (6) et (7), on obtient des relations analogues pour les tétraèdres podaires du centre de la sphère considérée tangente aux quatre plans des faces.

Dès lors, *dans les tétraèdres ABCD dont les cosinus des dièdres sont assujettis à vérifier l'une des conditions précitées (5), (6) ou (7), le tétraèdre podaire du centre de la sphère tangente aux quatre plans des faces situé sur l'hyperboloïde des hauteurs, est orthocentrique.*

Dans le cas plus particulier où le tétraèdre ABCD est isocèle, en vertu des égalités (7), on retrouve le théorème III.

*Remarques.* — 1° Les plans menés par le centre de la sphère considérée, tangente aux quatre plans des faces du tétraèdre ABCD, perpendiculairement à chacune des arêtes rencontrent respectivement les arêtes opposées en six points d'un même plan normal à la droite qui joint le centre de la sphère à l'orthocentre de son tétraèdre podaire, par rapport au tétraèdre fondamental.

2° Plus généralement, le lieu des points tels que leurs tétraèdres podaires, par rapport à un tétraèdre quelconque ABCD, soient orthocentriques, est une biquadratique gauche inverse tétraédrique de la biquadratique de Schroeter (*Crelle*, t. 93, 132<sup>2</sup>). Dans les tétraèdres spéciaux (5), (6), (7), les deux biquadratiques précitées passent donc par le centre de la sphère, tangente aux quatre plans des faces, situé sur l'hyperboloïde des hauteurs.

<sup>1</sup> Ce tétraèdre a été signalé par C. SERVAIS (*B.B.*, 1921, 69) et par M. R. BOUVAIST (*M.*, t. 54, supplément, p. 25).

<sup>2</sup> R. GOORMAGHTIGH, *M.*, 1936, 263.

8. — La première remarque du second paragraphe nous a suggéré la propriété suivante qui fixe une limite supérieure à la somme des dièdres d'un tétraèdre quelconque ABCD.

On sait que le contour polygonal de vecteurs  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  perpendiculaires aux faces BCD, CDA, DAB, ABC d'un tétraèdre ABCD, ayant tous le sens des normales intérieures ou toutes le sens des normales extérieures, et proportionnels aux aires des faces, est fermé et forme un quadrilatère gauche. La réciproque est vraie.

Soient le tétraèdre ABCD et le quadrilatère  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  ou MNPQ associé au tétraèdre. Les angles M, N, P, Q du quadrilatère sont égaux respectivement aux dièdres  $a, c', a', c$  suivant les arêtes BC, DC, DA, AB du tétraèdre.

THÉORÈME. — *La somme des dièdres d'un tétraèdre est comprise entre quatre droits et six droits.*

La première partie figure dans tous les traités de géométrie, mais la seconde est sans doute peu connue.

Or, la somme des angles d'un quadrilatère gauche étant inférieure à quatre droits, d'après la remarque précédente, la somme des dièdres d'un tétraèdre qui ont pour arêtes deux couples d'arêtes opposées est inférieure à quatre droits, et on a les inégalités

$$\begin{aligned} a + a' + b + b' < 4^d, & \quad b + b' + c + c' < 4^d, \\ c + c' + a + a' < 4^d; & \end{aligned}$$

de sorte que

$$a + a' + b + b' + c + c' < 6^d.$$

La limite  $6^d$  est atteinte quand, par exemple, un sommet du tétraèdre vient coïncider avec un point de la face opposée, intérieur à cette face, comme la limite inférieure  $4^d$  a lieu quand un sommet vient coïncider avec un point de la face opposée situé dans la région d'un cercle exinscrit à cette face.

(Décembre 1942)