

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1942-1950)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
  
**Rubrik:** SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE Conférences et communications.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

Réunion de Bâle, 6 et 7 septembre 1941.

La Société mathématique suisse a tenu sa trentième assemblée annuelle à Bâle, les 6 et 7 septembre 1941, sous la présidence de M. le professeur L. KOLLROS, président, en même temps que la 121<sup>me</sup> session annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative*, la Société a constitué comme suit son Comité pour les années 1942 et 1943: MM. les professeurs P. BUCHNER (Bâle), président; G. DE RHAM (Lausanne), vice-président; M. GUT (Zurich), secrétaire-caissier.

La *partie scientifique* a été consacrée aux communications ci-après, réparties sur trois séances.

1. — Karl MERZ (Chur). *Kreuzhaube erweitert nach Boy* (Calotte polyédrique d'après Boy). — Eine einfache Kreuzhaube <sup>1</sup> besitzt eine Doppelstrecke  $SO \equiv 5$ , wobei S die gemeinsame Spitze ist, von den beiden an SO in Scheitellage anstossenden dreiseitigen Pyramiden, und O der Schnitt der beiden Diagonalen des Quadrates, auf dem über zwei Scheiteldreiecken die beiden Pyramiden errichtet sind. Wird das unter jenem Quadrat ansetzende Prisma noch durch seine Grundfläche abgeschlossen, so ist das entstandene Polyeder als 11-Flach mit  $e = 10$ ,  $k = 20$ , also  $c = 1$ , eine Abbildung der projektiven Ebene, wobei S und O singuläre Punkte sind, als Endpunkte der Doppelstrecke.

Diese Kreuzhaube soll nun so erweitert werden, dass dadurch am Polyeder eine Selbstdurchdringung entsteht, die einen einfachen geschlossenen Streckenzug bildet, so dass keine Endpunkte mehr an der Durchdringung bestehen. Um dies zu erzielen, sind zu der Doppelstrecke  $OS \equiv 5$  noch weitere Doppelstrecken anzufügen, z. B.  $ST \equiv 9$  und  $TO \equiv 3$ , womit das Doppelstreckendreieck SOT entsteht. Um dabei die neue Doppelstrecke 9 zu erhalten, hat man die in 9 als

<sup>1</sup> K. MERZ, Kreuzhaube aus verschiedenen Netzen. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, LXXXV, 1940 (Seite 51).

Kante zusammenstossenden beiden Flächen A und E über 9 hinaus zu erweitern und dann noch mittels zwei abschliessenden Flächen eine neue Scheitelzelle aussen längs 9 anzufügen. Längs 3 entsteht, auf entsprechende Weise, eine innere Hohlzelle, die in Scheitellage ist zu einer äussern Lücke der Kreuzhaube. Von diesem geschlossenen Polyeder,  $f = 15$ ,  $e = 14$ ,  $k = 28$ , also auch mit  $c = 1$ , mit dem Dreieck SOT als Selbstdurchdringung, lässt sich ein Netz herstellen (Vorweisung). Bei der Aufklappung dieses Netzes zum 15 Flach tritt die Eigentümlichkeit ein, dass die dabei entstehenden Wendestrecken, in denen Ober- und Unterseite des Netzes aneinanderstossen und damit die Einseitigkeit herbeiführen, zugleich in die Doppelstrecken fallen. Das Dreieck SOT der Doppelstrecken entspricht damit der unendlich fernen Geraden, welche die Wendegerade der projektiven Ebene ist, und es entspricht daher zugleich auch der Selbstdurchdringung dieser Ebene. Diese durch die erweiterte Kreuzhaube erhaltene Abbildung der projektiven Ebene hat allerdings noch die drei singulären Punkte S, O, T, die aber von einfacherer Art sind als die sechs singulären Punkte am Heptaeder, in denen die drei Doppelstrecken als Selbstdurchdringungen endigen. Ausserdem fehlt der dreifache Punkt, wie er am Heptaeder auftritt. Doch tritt dafür eine Hohlzelle auf. Dieses Polyeder kann als Zugang zu einer neuen Boy'schen Fläche dienen.

2. — M. DIETHELM (Rickenbach, Schwyz). *Ein kurzer Weg zur Entwicklung der Hyperbelfunktionen.* — L'auteur indique un moyen rapide et élémentaire permettant de présenter, dans une première étude, les propriétés essentielles des fonctions hyperboliques en partant de l'hyperbole et du secteur hyperbolique. Analogies entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires.

3. — Julien MALENGREAU (Montreux). *Euclide ou Pythagore ? (Dissertation sur le continu et le discontinu.)* — Pythagore considérait la droite comme une somme de points. Cette conception a été abandonnée depuis la découverte des irrationnelles. Les données qui servent de base à la géométrie d'Euclide présupposent que les figures appartiennent à un espace continu, aussi la géométrie classique fondée sur la méthode euclidienne ne fait-elle aucune allusion à l'espace discontinu. L'auteur se propose de montrer qu'il s'agit là d'une lacune à combler et dans ce but il examine de près la théorie de l'évaluation des grandeurs. Cette théorie est basée sur la notion de limite dont l'emploi ne se justifie cependant qu'en cas de nécessité absolue. Il est donc indispensable de commencer la géométrie par la recherche du plus vaste des ensembles de points tel que ses grandeurs puissent toutes être évaluées au moyen de la seule notion de commune mesure. Cet ensemble est un espace discontinu auquel l'auteur a donné le nom d'espace rationnel.

L'évaluation des grandeurs de l'espace rationnel est basée sur la relation de Stewart que l'auteur établit en partant des conditions auxquelles il faut satisfaire pour obtenir la compatibilité des postulats nécessaires à la construction de cet espace. La relation de Stewart devient ainsi la garantie de stabilité de tout l'édifice euclidien.

L'espace rationnel jouit d'une propriété remarquable d'après laquelle non seulement les longueurs d'une même droite sont toujours entre elles dans un rapport rationnel, mais aussi les surfaces d'un même plan, les volumes d'un même espace à trois dimensions, etc.

Ce n'est qu'après l'étude de cet espace discontinu que l'on devrait commencer celle de l'espace continu; composé de l'ensemble de tous les espaces rationnels simultanément possibles en vertu du postulat de continuité adopté. Cette seconde étude peut se faire à l'aide de la notion de limite dont l'emploi est alors justifié du fait qu'avec l'étude de l'espace rationnel on a utilisé la notion de la commune mesure dans toute l'étendue possible.

L'auteur montre que la nécessité de commencer la géométrie par l'espace discontinu apparaît encore au cours de la résolution des problèmes que pose la recherche des fondements de la géométrie. C'est parce qu'on a toujours abordé le côté mathématique de cette question, en partant de l'espace continu qu'elle a fini par apparaître inextricable. En réalité la réponse à cette question s'identifie tout simplement à la géométrie même, lorsque celle-ci est bien ordonnée, c'est-à-dire commence par l'édification point par point de l'espace rationnel. La considération de cette identité permet à l'auteur d'affirmer que c'est la possibilité de la géométrie classique qui entraîne celle de la géométrie analytique et non pas l'inverse, comme on l'a supposé avec le professeur Hilbert.

4. — Johann Jakob BURCKHARDT (Zurich). — *Les œuvres posthumes de Ludwig Schläfli*. — Résumé d'un rapport sur la classification et l'élaboration d'un catalogue des œuvres posthumes de Ludwig Schläfli, qui doit être publié, avec une Table des matières et une Note sur les travaux de Schläfli relatifs à la Théorie des formes quadratiques, dans les *Mitteilungen der Berner Naturforschenden Gesellschaft*.

Les œuvres posthumes ont été classées sur la base du relevé de Graf (*Mitt. der Berner Naturf. Ges.*, 1896) avec l'aide de la Fondation *Escher-Abegg*. Nous avons trouvé des manuscrits méritant une mise au point dans les domaines suivants: 1. Théorie des surfaces du troisième ordre. — 2. 25 cahiers de géométrie. — 3. 12 cahiers sur la théorie d'Hermite des équations modulaires. — 4. Théorie des formes quadratiques.

5. — Louis KOLLROS (Zurich). — *Généralisation des théorèmes de Miquel et Clifford*. — Cinq droites d'un plan, prises quatre à quatre,

déterminent cinq paraboles dont les foyers sont sur un cercle (théorème de Miquel). Ce cercle est le lieu géométrique des points P tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les cinq droites données et le point P lui-même soient sur un conique. Pour les points de Miquel, cette conique dégénère en deux droites.

Six droites d'un plan, prises cinq à cinq, déterminent six cercles de Miquel; ces six cercles passent par un point; sept droites, prises six à six, déterminent sept de ces points qui sont sur un cercle, et ainsi de suite (théorème de Clifford, *Math. Papers*, p. 38). Les cercles de Clifford peuvent aussi être définis comme lieux géométriques; on trouve le résultat suivant:

*On donne  $2n + 1$  droites dans un plan; le lieu géométrique des points P tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur ces droites soient sur une courbe algébrique de degré  $n$  ayant en P un point multiple d'ordre  $n - 1$  est un cercle. Si on a  $2n + 2$  droites, il n'y a qu'un point jouissant de cette propriété.*

*Démonstration de deux formules de Steiner.* — Une conique est déterminée par son centre O et trois tangentes. Soient A, B, C les sommets du triangle formé par les trois tangentes, A', B', C' les milieux des côtés opposés a, b, c. Les côtés du triangle A' B' C' prolongés indéfiniment divisent le plan en sept parties: l'intérieur du triangle A' B' C', les trois parties extérieures comprises dans les angles A', B', C', les trois parties adjacentes aux côtés. La conique est une ellipse si le centre O est dans l'une des quatre premières parties, une hyperbole si O est dans l'une des trois dernières.

O est aussi le centre d'une conique circonscrite au triangle ABC; elle est toujours de même nature que la conique inscrite.

Si r est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, si x, y, z sont les distances de O aux côtés du triangle ABC et x', y', z', les distances de O aux côtés du triangle A' B' C', l'aire E<sub>i</sub> de l'ellipse inscrite est donnée par la formule:

$$E_i^2 = 4 \pi^2 r x' y' z'$$

et l'aire E<sub>c</sub> de l'ellipse circonscrite, par:

$$E_c^2 = \pi^2 r \frac{x^2 y^2 z^2}{x' y' z'}$$

Ces deux formules ont été indiquées sans démonstration par Steiner (*Œuvres complètes*, t. II, p. 329). On peut les démontrer en déterminant le produit des puissances des involutions des points conjugués sur les axes; on voit ainsi que si la conique est une hyperbole inscrite ou circonscrite au triangle ABC, chaque formule donne l'aire de l'ellipse qui a les mêmes axes que l'hyperbole (voir *Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie*, 2. Teil, bearbeitet von Schröter, Anhang, p. 556 à 564).

Mais on peut aussi transformer les formules en expressions invariants par affinité en multipliant et divisant la première par  $abc$  et la seconde par  $a^2 b^2 c^2$ . Si l'on désigne l'aire du triangle ABC par  $T$  ( $= abc : 4r$ ) et les doubles des aires des triangles OBC, OCA, OAB respectivement par  $t = ax$ ,  $t' = by$ ,  $t'' = cz$ , on aura:  $ax' = T - t$ ,  $by' = T - t'$ ,  $cz' = T - t''$  et les deux formules deviendront:

$$E_i^2 = \frac{\pi^2 (T - t) (T - t') (T - t'')}{T}, \quad E_c^2 = \frac{\pi^2 t^2 t'^2 t''^2}{4T (T - t) (T - t') (T - t'')}.$$

Il suffit alors de les démontrer pour le cercle inscrit ou le cercle circonscrit à un triangle, ce qui est élémentaire.

Une conique est aussi déterminée par son centre O et un triangle polaire ABC, mais elle n'est pas de même nature que la conique de même centre inscrite ou circonscrite à ABC; elle est imaginaire si O est à l'intérieur du triangle ABC; c'est une ellipse si O est en dehors et dans un des angles A, B, C; c'est une hyperbole si O est dans l'une des trois parties extérieures adjacentes aux côtés. Dans le cas de l'ellipse, l'aire  $E_p$  est donnée par la formule:

$$E_p^2 = 2 \pi^2 rxyz = \pi^2 \cdot \frac{tt' t''}{2T}.$$

Mais dans tous les cas, la valeur absolue du produit des puissances des involutions des points conjugués sur les deux axes est  $2rxyz$ . On a donc toujours en valeur absolue:

$$E_p^2 = E_i E_c$$

ou, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont les demi-axes de la conique circonscrite, et  $\alpha'$ ,  $\beta'$  ceux de la conique inscrite:

$$2rxyz = \alpha\beta \alpha'\beta'.$$

En particulier, si la conique inscrite est un cercle de rayon  $r'$ , on a:

$$2rr' = \alpha\beta \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = 2r.$$

Donc, les ellipses de centre O circonscrites à tous les triangles inscrits au cercle ( $r$ ) et circonscrits au cercle ( $r'$ ) sont égales.

6. — H. HOPF (Zurich). *Sur certaines relations entre la Théorie des Groupes et la Topologie.* — On sait que le premier groupe de Betti  $B^1$  d'un complexe est déterminé par son groupe fondamental  $G$ : il est le groupe quotient  $G/C_G$ , où  $C_G$  est le groupe des commutateurs (Kommutatorgruppe, ou groupe dérivé) de  $G$ . Les recherches communiquées ici concernent l'influence du groupe fondamental  $G$  sur le deuxième groupe de Betti  $B^2$ .

THÉORÈME I: A tout groupe  $G$  est attaché, par une opération algébrique bien déterminée, un groupe abélien  $G_1^*$ ; si  $G$  est le groupe fondamental d'un complexe  $K$  et si  $S^2$  est le sous-groupe de  $B^2$  composé des classes d'homologie qui contiennent des images continues de la surface de la sphère, on a:

$$B^2 / S^2 = G_1^* .$$

Corollaire:  $G_1^*$  est image homomorphe de  $B^2$ ; le deuxième groupe de Betti n'est donc en ce sens pas « plus petit » que le groupe  $G_1^*$ , qui est déterminé par le groupe fondamental.

Complément au théorème I: Pour chaque groupe  $G$  (avec un nombre fini de générateurs et de relations) il y a un complexe  $K$  dont le groupe fondamental est  $G$  et pour lequel  $S^2 = 0$ ;  $G_1^*$  est par suite la « borne inférieure exacte » des groupes  $B^2$  qui sont compatibles, en tant que deuxième groupes de Betti, avec le groupe fondamental  $G$ .

Pour caractériser  $G_1^*$  algébriquement, nous utilisons le procédé suivant de formation de groupes:  $F$  étant un groupe quelconque,  $R$  un sous-groupe de  $F$ , soit  $C_F(R)$  le sous-groupe de  $F$  engendré par tous les éléments  $x \cdot r \cdot x^{-1} \cdot r^{-1}$  avec  $x \in F$ ,  $r \in R$ ;  $C^2(F) = C_F$  est par exemple le groupe des commutateurs,  $C_F(C_F) = C_F^2$  est le « deuxième groupe des commutateurs » de  $F$ .

THÉORÈME II: Etant donné un homomorphisme du groupe libre  $F$  sur le groupe  $G$  ou l'image inverse de l'élément unité de  $G$  est le sous-groupe invariant  $R$  de  $F$ , on a:

$$G_1^* = (C_F \cap R) / C_F(R) .$$

Le fait que le groupe qui apparaît au second membre de cette isomorphie ne dépend pas des groupes  $F$  et  $R$ , mais seulement du groupe quotient  $F/R$ , donc seulement de  $G$ , constitue un théorème de théorie des groupes.

Exemple: Si  $G$  est le groupe abélien libre de rang  $p$ ,  $G_1^*$  est le groupe abélien libre de rang  $\frac{p(p-1)}{2}$ . On peut le voir géométriquement en se basant sur le théorème I ou algébriquement en se basant sur le théorème II.

Les groupes  $C_F(R)$  jouent un rôle important dans la nouvelle théorie des groupes, en particulier dans des travaux de Hall, Magnus, Witt; il convenait de souligner ici la relation entre ce procédé de formation de groupes et des concepts topologiques.

Un exposé complet paraîtra dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 14, pp. 257-309.

7. — Pierre Humbert † (Lausanne). *Polyèdre sans singularités topologiques homéomorphe au plan projectif dans l'espace à trois dimensions*. (Présenté par H. Hopf, Zurich.) — Par des modifications apportées à un polyèdre que K. Merz a obtenu à partir de l'heptaèdre, un polyèdre est construit dans l'espace euclidien à trois dimensions, qui est un modèle du plan projectif dans le sens suivant: Il est l'image uniforme et continue du plan projectif, et chaque point du plan projectif possède un voisinage dans lequel la correspondance est *biunivoque*. Ce modèle possède la même symétrie que la surface connue de Boy et peut être considéré comme une approximation polyédrale de cette surface, qui est ainsi obtenue par une voie nouvelle et intuitive. La description exacte de ce modèle paraîtra dans les *Comment. Math. Helv.*, vol. 14, en même temps que la construction mentionnée de K. Merz.

8. — G. DE RHAM (Lausanne). *Sur une décomposition des chaînes d'un complexe*. — Soit un complexe à  $n$  dimensions  $C$ , et soient  $a_i^q$  ( $i = 1, 2, \dots, \alpha_q$ ;  $0 \leq q \leq n$ ) ses cellules à  $q$  dimensions, prises avec une orientation déterminée. On appelle produit scalaire des deux chaînes

$$c^q = \sum_i y_i a_i^q \quad \text{et} \quad d^q = \sum_i x_i a_i^q,$$

le nombre

$$c^q \cdot d^q = \sum_i x_i y_i.$$

A toute chaîne  $c^q$  correspond une chaîne à une dimension de moins, sa frontière  $\mathcal{F} c^q$ , et une chaîne à une dimension de plus,  $\mathcal{D} c^{q-1}$ , que nous appellerons sa cofrontière, selon l'expression proposée par M. Whitney.

Quelles que soient les chaînes  $c^{q+1}$  et  $c^q$ , on a la relation

$$\mathcal{F} c^{q+1} \cdot c^q = c^{q+1} \cdot \mathcal{D} c^q. \quad (1)$$

Cette relation peut servir de définition de la cofrontière. On a d'ailleurs une définition équivalente en considérant le complexe réciproque de  $C$ ; à chaque chaîne à  $q$  dimensions de  $C$  correspond, comme on sait, une chaîne à  $n - q$  dimensions du complexe réciproque, sa duale, et la cofrontière n'est pas autre chose que la duale de la frontière de la duale. On dit que la chaîne  $c^q$  est fermée si  $\mathcal{F} c^q = 0$ , cofermée si  $\mathcal{D} c^q = 0$ , homologue à zéro s'il existe une chaîne  $c^{q+1}$  telle que  $\mathcal{F} c^{q+1} = c^q$ , cohomologue à zéro s'il existe une chaîne  $c^{q+1}$  telle que  $\mathcal{D} c^{q-1} = c^q$ . Nous appellerons *harmonique* toute chaîne à la fois fermée et cofermée. On a le théorème suivant:

Toute chaîne  $c^q$  peut être décomposée, d'une manière unique, en la somme d'une chaîne homologue à zéro, d'une chaîne cohomologue à zéro et d'une chaîne harmonique.

La démonstration résulte très simplement de la formule (1), en remarquant que, pour qu'une chaîne soit cofermée, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toute chaîne homologue à zéro, et pour qu'elle soit fermée, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toute chaîne cohomologue à zéro. Deux chaînes sont dites orthogonales si leur produit scalaire est nul. On admet que le domaine des coefficients des chaînes est un corps; si la chaîne  $c^q$  est à coefficients entiers, il peut arriver que les chaînes composantes ne soient pas à coefficients entiers.

Corollaire: Dans chaque classe d'homologie de cycles, comme dans chaque classe de cohomologie de cocycles, il y a une chaîne harmonique et une seule.

Ces propositions présentent une analogie parfaite avec la théorie des formes harmoniques sur un espace de Riemann, considérées par M. Hodge. Aux chaînes de dimension  $q$  correspondent les formes différentielles extérieures de degré  $q$ , à l'opération  $\mathcal{D}$  correspond la dérivation extérieure, qui associe à chaque forme une autre forme de degré inférieur d'une unité; chaque forme  $\omega$  de degré  $q$  possède, dans un espace de Riemann à  $n$  dimensions, une forme adjointe  $\omega^*$  de degré  $n - q$ , analogue à la chaîne duale, ce qui permet de définir le produit scalaire de deux formes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  par l'intégrale

$$\int \omega_1 \omega_2^*$$

étendue à tout l'espace de Riemann et une opération analogue à l'opération  $\mathcal{F}$  par la formule  $\mathcal{F}\omega = [\mathcal{D}\omega^*]^*$ .

9. — H. HADWIGER (Bern). *Bemerkung über bedingt konvergente Vektorreihen.* — Paraîtra dans *Math. Zeitschr.*; vol. 47.

10. — Ch. BLANC (Lausanne). *Les polyèdres et les théorèmes d'Abel et de Riemann-Roch.* — Paraîtra dans les *Comment. Math. Helv.*, vol. 14, pp. 212-229.

11. — F. FIALA (Genève). *Sur le problème isopérimétrique*<sup>1</sup>. — On considère une surface homéomorphe au plan euclidien et normale au sens de Cartan. On peut démontrer les deux théorèmes suivants<sup>2</sup>:

<sup>1</sup> Le mémoire paraîtra dans le vol. XV des *Comment. Math. Helv.*

<sup>2</sup> Voir aussi: F. FIALA, Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive. *Comment. Math. Helv.*, vol. XIII, 1941, pp. 293-346.

A. — Si la courbure totale est partout positive, parmi toutes les courbes simplement fermées de longueur donnée, il en existe au moins une qui contient un domaine d'aire maximum.

B. — Si la courbure totale est partout négative, et si l'intégrale de cette courbure est bornée inférieurement, parmi toutes les courbes simplement fermées de longueur donnée, il n'en existe aucune qui contienne un domaine d'aire maximum.

12. — B. ECKMANN (Zurich). *Vektorfelder auf Sphären* (Champs de vecteurs sur les sphères). — Par un champ de vecteurs (ou un champ de directions) sur une sphère, nous entendons un champ continu de vecteurs-unité tangents à cette sphère. D'après un théorème connu de Poincaré et Brouwer, il n'existe pas de champs de vecteurs sur les sphères à dimension paire (tandis qu'il existe un tel champ sur toute sphère à dimension impaire). Un *k*-champ sur une sphère est un système de *k*-champs de vecteurs tel qu'en tout point de la sphère les *k*-vecteurs du système soient linéairement indépendants, ou bien, ce qui revient au même, forment un système orthogonal. S'il existe sur une sphère à *n* dimensions un *n*-champ, on dit que cette sphère est *parallélisable*<sup>1</sup>; les sphères de dimension 1, 3, 7 ont cette propriété, comme on sait<sup>1</sup>, mais on ne sait pas s'il existe d'autres sphères parallélisables. Les méthodes de Stiefel<sup>1</sup>, qui dans le cas des espaces projectifs réels ont conduit à bien des résultats, ne sont plus applicables dans le cas des sphères. Cependant nous pouvons montrer:

*Sur les sphères à  $4s + 1$  dimensions il n'existe pas de 2-champ. Une telle sphère ne peut donc être parallélisable.*

La démonstration de ce théorème, qui sera publiée prochainement, fait usage des « groupes d'homotopie » introduits par Hurewicz et de quelques résultats de la théorie des « espaces fibrés »<sup>2</sup>, et de plus de certaines propriétés du groupe fondamental des groupes orthogonaux. Dans cette démonstration on réduit le théorème énoncé au suivant:

*Soit  $r$  un nombre impair; si on a  $r$  fonctions complexes  $f_1, f_2, \dots, f_r$  de  $r$  variables complexes  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , continues pour toutes les valeurs des variables  $\neq (0, 0, \dots, 0)$ , et si la relation*

$$- \sum_{j=1}^r u_j f_j(u_1, u_2, \dots, u_r) \equiv 0$$

<sup>1</sup> E. STIEFEL, *Comm. Math. Helv.*, vol. 8 (1935), 305-351 et vol. 13 (1941), 201-218.

<sup>2</sup> B. ECKMANN, Zur Homotopietheorie gefaseter Räume. *Comm. Math. Helv.*, 14 (1943).

a lieu pour toutes les valeurs des  $u^t$ , alors les fonctions  $f_1, f_2, \dots, f_r$  ont au moins un zéro commun (différent de  $(0, 0, \dots, 0)$ ).

On déduit de ce résultat trouvé par une voie purement topologique de nouveaux théorèmes algébriques (en choisissant pour les fonctions  $f_j$  des formes ou des polynômes en  $u_1, \dots, u_r$ ). On peut poser le problème de les démontrer par des méthodes algébriques <sup>1</sup>.

13. — P. BERNAYS (Zurich). *A propos des nouvelles recherches de Gödel.* — Dans son mémoire « The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory » (*Annals of Mathematics Studies*, n° 3, Princeton, 1940; voir aussi le rapport dans le *Journal of Symbolic Logic*, vol. VI, pp. 112-114), Gödel a prouvé qu'à la base de la théorie axiomatique des ensembles, y compris la délimitation exacte de la notion « definite Eigenschaft » et aussi l'axiome du remplacement, mais non pas l'axiome du choix, on peut établir un modèle de la théorie des ensembles pour lequel l'assertion de l'axiome du choix ainsi que celle de l'hypothèse généralisée du continu sont des théorèmes démontrables. La construction de ce modèle comprend la définition par un procédé récurrent d'une représentation univoque des nombres ordinaux sur les ensembles.

A ces résultats de Gödel on peut ajouter la remarque qu'il est possible d'éliminer de toute la considération l'axiome sur l'ensemble de tous les sous-ensembles. (Il s'entend que l'hypothèse généralisée du continu doit alors être restreinte à des nombres cardinaux pour lesquels il existe un plus haut nombre cardinal.)

On peut d'ailleurs montrer généralement qu'au sein d'une axiomatique des ensembles, pour déduire les théorèmes généraux (bon ordre et récurrence transfinie) ainsi que l'analyse infinitésimale, on peut se passer de l'axiome sur l'ensemble de tous les sous-ensembles.

En écartant cet axiome de la théorie axiomatique des ensembles, nous gagnons une plus grande liberté en regard des modèles — tout en conservant l'opposition soulignée par Zermelo entre la théorie axiomatique des ensembles et ses modèles. (Le rôle des « Grenzzahlen » de Zermelo devient maintenant commun à tous les ordinaux « réguliers » au sens de Hausdorff.)

De cette manière, nous échappons à l'obligation de choisir entre un cadre axiomatique trop restreint et un cadre dépassant déjà les besoins de l'analyse en nous engageant dans la progression illimitée des nombres cardinaux transfinis.

14. — W. SCHERRER (Bern). *Zur Theorie der Elementarteilchen.* — Veranlasst durch neue Ansätze zu einer skalaren relativistischen Wellenmechanik <sup>2</sup> diskutiert der Referent folgenden Ansatz zu einer

<sup>1</sup> Voir B. E. ECKMANN, *Comm. Math. Helvetici* vol. 15, 1-26.

<sup>2</sup> Vgl. *Helv. Phys. Acta*, XIV, 1, 81, und XIV, 2.

Gravitationstheorie mit einer skalaren und durchwegs positiven Wirkungsdichte

$$T = T(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (1)$$

und dem Linienelement

$$ds^2 = G_{ik} dx_i dx_k, \quad (2)$$

$$\int TR \sqrt{G} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \text{Extremum}, \quad (3)$$

mit der Nebenbedingung

$$\int T \sqrt{G} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \text{konst.}, \quad (4)$$

wo R den Riemannschen Krümmungsskalar darstellt.

Bezeichnet man mit  $\Lambda$  die wegen (4) sich ergebende kosmologische Konstante und benutzt man die Abkürzung

$$T_{ik} = \frac{\delta^2 T}{\delta x_i \delta x_k} - \Gamma_{ik}^\lambda \frac{\delta T}{\delta x_\lambda}, \quad (5)$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$TR_{ik} = T_{ik} - G_{ik} \square T, \quad R = -\Lambda \quad (6)$$

zur Bestimmung der 11 Grössen  $G_{ik}$  und  $T$ .

Als Folgerung aus (6) ergibt sich die Gleichung

$$\square T = \frac{\Lambda}{3} T. \quad (7)$$

Sie darf nicht unmittelbar als Wellengleichung angesprochen werden, da nicht  $T^2$  sondern  $T$  die Materiedichte darstellt.

Das zugehörige kosmologische Problem ist eindeutig bestimmt und liefert eine Welt, die sich aus einer Einsteinschen Zylinderwelt für  $x_0 = -\infty$  in eine De-Sitter-Welt für  $x_0 = +\infty$  entwickelt.

Einen allgemeineren Ansatz erhält man, wenn man in (3) R ersetzt durch

$$R + k(\text{grad}) \text{ Lg } T)^2. \quad (8)$$

15. — L. LOCHER (Winterthur). *Ueber projektive Linien- und Ebenenkoordinaten.* — Homogene projektive Koordinaten bildet man, indem die nichthomogenen  $K$  als Quotienten mit derselben Hilfsvariablen im Nenner dargestellt werden. Zur Einführung stellt sich die didaktische Frage, ob diese homogenen  $K$  nicht unmittelbar anschaulich gelesen werden können. Das geht sehr einfach und wird

doch in der Lehrbuchliteratur unterlassen. Führt man das K-System entsprechend ein, so lassen sich die  $K u, v, \dots$  des Punktes  $Uu + Vv + \dots = 0$  und des mit ihm inzidierenden dualen Elementes  $U, V, \dots$  unmittelbar anschaulich fassen. Sind im metrischen Falle  $u, v, w, \dots$  rechtwinklige Punktkoordinaten, so stellen  $U, V, W, \dots$  diejenigen dazu dualen  $K$  dar, welche sich aus der pseudoeuklidischen Metrik ergeben. Die vorgetragene Bemerkung ist in meinem Buche *Projektive Geometrie* (Orell-Füssli, 1940, S. 215 f.) angewendet.

16. — Sophie PICCARD (Neuchâtel). *Sur une catégorie d'ensembles parfaits et leur application à divers problèmes métriques. Quelques propositions concernant les ensembles de sommes et les ensembles de différences de nombres d'un ensemble linéaire.* — Soit  $n$  un entier  $> 2$ , soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k < n$  et soient  $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_k$  ( $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ )  $k$  nombres donnés (distincts, quelconques) de la suite  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ . L'ensemble  $P$  des nombres  $\geq$  qui peuvent s'exprimer dans le système de numération à base  $n$  à l'aide des seuls chiffres  $a_0, a_1, \dots, a_k$  est un ensemble parfait non dense de mesure nulle. La famille  $\mathcal{F}$  de tous les ensembles  $P$  est dénombrable. Nous avons étudié la structure des ensembles de cette famille  $\mathcal{F}$  qui fournit de nombreux et instructifs exemples pour des théorèmes d'existence dans la théorie des ensembles linéaires. Un ensemble  $P$  peut être de première espèce<sup>1</sup>. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que  $a_{i+1} - a_i = 1$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ ) et que  $2a_k \geq n - 1$ , si  $a_k < n - 1$ , ou que l'ensemble  $K = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  contienne, avec tout couple de nombres  $a_i, a_{i+1}$  tels que  $a_{i+1} - a_i = l > 1$ , les nombres  $a_i - 1, a_i - 2, \dots, a_i - l + 2$  et  $a_{i+1} + 1, a_{i+1} + 2, \dots, a_{i+1} + l - 2$ .

$A$  et  $B$  étant deux ensembles linéaires, désignons par  $\sigma(A, B)$  l'ensemble des sommes  $a + b, a \in A, b \in B$ , et par  $\delta(A, B)$  l'ensemble des différences  $a - b, a \in A, b \in B$ . En particulier, si  $A = B$ , posons  $\sigma(A, A) = \sigma(A)$  et  $\delta(A, A) = \delta(A)$ .

On a les propositions suivantes:

1. Si  $A$  est ouvert,  $\sigma(A)$  est ouvert et  $\delta(A)$  est un  $G_\delta$ .
2. Si  $A$  est fermé, borné ou semi-borné,  $\sigma(A)$  est fermé. Il en est de même de  $\delta(A)$ , si l'ensemble  $A$  est borné.
3. Si  $A$  est dense en soi, il en est de même de  $\sigma(A)$  et de  $\delta(A)$ .  
Il résulte de 2 et de 3 que si  $A$  est parfait (borné ou semi-borné),  $\sigma(A)$  est parfait. Si  $A$  est parfait et borné,  $\delta(A)$  est parfait.

<sup>1</sup> Terminologie de M. Mirimanoff (voir D. MIRIMANOFF, Sur un problème de la théorie de la mesure, II, *Fund. Math.*, t. IV, p. 118); M. Denjoy qualifie ces ensembles d'ensembles présentant le caractère  $A$  (voir A. DENJOY, Sur une classe d'ensembles parfaits discontinus, *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens*, Strasbourg, 1920).

4. Si  $A$  est un  $F_\sigma$ , chacun des ensembles  $\sigma(A)$ ,  $\delta(A)$  est aussi un  $F_\sigma$ .

5. Si  $A$  est un  $G_\delta$ ,  $\sigma(A)$ , aussi bien que  $\delta(A)$ , peut ne pas être un  $G_\delta$ .

6. Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles linéaires de mesure intérieure positive, ou s'ils sont tous deux de seconde catégorie de Baire et jouissent de la propriété de Baire, ou encore s'ils sont tous deux des ensembles parfaits de première espèce, l'ensemble  $\sigma(A, B)$ , aussi bien que  $\delta(A, B)$ , contient un intervalle.

Les parties des énoncés 1-5 relatives aux ensembles  $\delta(A, B)$  sont connues.

7. Il existe deux ensembles linéaires  $A, B$ , tels que  $\delta(A, B) = (-\infty, \infty)$  alors que  $\text{mes } \sigma(A, B) = 0$ . Il existe aussi deux ensembles linéaires  $C, D$  tels que  $\sigma(C, D) = (-\infty, \infty)$  alors que  $\text{mes } \delta(C, D) = 0$ .

8. Il existe deux ensembles linéaires  $A$  et  $B$ , tels que  $\text{mes } \sigma(A) = 0$   $\text{mes } \sigma(B) = 0$ , alors que  $\text{mes } \sigma(A, B) > 0$ . Il existe aussi deux ensembles linéaires  $C$  et  $D$ , tels que  $\text{mes } \sigma(A) > 0$ ,  $\text{mes } \sigma(B) > 0$  et que  $\text{mes } \sigma(C, D) = 0$ .

Une proposition analogue a, comme on sait, lieu pour les ensembles de différences.

$P$  et  $K$  ayant la signification indiquée dans le premier alinéa de ce résumé, on a les résultats suivants concernant la mesure (lesbesguienne) des ensembles  $\sigma(P)$  et  $\delta(P)$ .

9. a) *Supposons d'abord que*  $a_k < n - 1$ .

Si tout nombre de la suite  $1, 2, \dots, n - 1$  appartient à  $\sigma(K)$ , on a  $\sigma(P) = (-\infty, \infty)$ .

S'il existe au moins un nombre de la suite  $1, 2, \dots, n - 1$  qui ne fait pas partie de  $\sigma(K)$ , on a  $\sigma(P) \neq (-\infty, \infty)$ .

S'il existe au moins un entier  $i$  de la suite  $1, 2, \dots, n - 1$  qui est absent dans  $\sigma(K)$  en même temps que le nombre  $n + i$ , on a  $\text{mes } \sigma(P) = 0$ .

Si quel que soit le nombre  $i$  de la suite  $1, 2, \dots, n - 1$  qui fait défaut dans  $\sigma(K)$  (et nous supposons qu'il existe au moins un tel nombre), le nombre  $n + i$  appartient à  $\sigma(K)$ , on a  $\text{mes } \sigma(P) > 0$  et en même temps  $\text{mes} [(-\infty, \infty) - \sigma(P)] > 0$ .

b) *Supposons maintenant que*  $a_k = n - 1$ .

Si deux nombres consécutifs de la suite  $1, 2, \dots, 2n - 2$  ne font pas simultanément défaut dans  $\sigma(K)$  ou si aucun nombre de la suite  $1, 2, \dots, n - 1$  ne fait défaut dans  $\sigma(K)$ , on a  $\sigma(P) = (-\infty, \infty)$ .

Si deux nombres consécutifs de la suite  $1, 2, \dots, n - 2$  ou si un nombre au moins de la dite suite et deux nombres consécutifs de la suite  $n, n + 1, \dots, 2n - 2$  font défaut dans  $\sigma(K)$ , on a  $\sigma(P) \neq (-\infty, \infty)$  et  $\text{mes} [(-\infty, \infty) - \sigma(P)] > 0$ . Dans ce cas,  $\sigma(P)$  est de mesure nulle s'il existe au moins un entier  $i$  ( $1 \leq i \leq n - 2$ ) qui

fait défaut dans  $\sigma(K)$  en même temps que  $n + i$ . Par contre, si quel que soit le nombre  $i$  de la suite  $1, 2, \dots, n - 2$  qui fait défaut dans  $\sigma(K)$ , on a  $n + i \in \sigma(K)$ , l'ensemble  $\sigma(P)$  est de mesure positive.

10. Désignons par  $K_1$  l'ensemble des nombres  $n - d$ , où  $d$  est un élément non nul quelconque de l'ensemble des distances  $D(K)$  de  $K$ .

Si  $D(K) + K_1 = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  et si  $1 \in D(K)$ , on a  $\delta(P) = (-\infty, \infty)$ .

Si  $a_k < n - 1$ , on a soit  $\delta(P) = (-\infty, \infty)$ , soit  $\text{mes } \delta(P) = 0$ .

Si  $a_k = n - 1$ ,  $D(K) + K_1 = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ ,  $1 \notin D(K)$ , mais s'il n'existe aucun nombre  $t$  de la suite  $0, 1, 2, \dots, n - 2$ , tel que  $t \in D(K)$ ,  $t + 1 \in D(K)$ , on a  $\delta(P) = (-\infty, \infty)$ .

Si  $a_k = n - 1$ ,  $D(K) + K_1 = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ ,  $1 \notin D(K)$ , mais s'il existe un nombre  $t$  de la suite  $1, 2, \dots, n - 2$ , tel que  $t \in D(K)$ ,  $t + 1 \in D(K)$ , on a  $\text{mes } \delta(P) > 0$  et  $\text{mes} [(-\infty, \infty) - \delta(P)] > 0$ .

Si  $a_k = n - 1$  et s'il existe au moins un nombre de la suite  $0, 1, 2, \dots, n - 2$  qui fait défaut dans  $D(K) + K_1$ , on a soit  $\delta(P) = (-\infty, \infty)$  soit  $\text{mes } \delta(P) = 0$ .

11.  $P$  étant un ensemble parfait de la famille  $\mathcal{F}$ , l'ensemble  $\sigma(P)$ , aussi bien que  $\delta(P)$ , peut également faire partie de la famille  $\mathcal{F}$ .

12. Il existe des ensembles de la famille  $\mathcal{F}$  qui ne sauraient être les ensembles de distances d'un ensemble linéaire.

17. — A. SPEISER (Zürich). *Ueber geodätische Linien*.

18. — R. WAVRE (Genève). *L'itération au moyen des opérateurs hermitiens*. — Pour les définitions fondamentales on consultera l'*Introduction mathématique à la Mécanique quantique* de G. JULIA, t. II.

Soit  $A$  un opérateur linéaire,  $(x, y)$  le produit scalaire, il peut être défini dans l'espace d'Hilbert ou dans l'espace fonctionnel. On a, si  $A$  est hermitien,

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Considérons la suite

$$y_1 = Ax_0, \quad x_1 = \frac{y_1}{n_1}, \quad n_1 = \|y_1\| \text{ norme de } y_1,$$

$$y_2 = Ax_1, \quad x_2 = \frac{y_2}{n_2}, \quad n_2 = \|y_2\| \quad \text{»} \quad \text{»} \quad y_2,$$

$$y_3 = Ax_2, \quad x_3 = \frac{y_3}{n_3}, \quad \text{etc.}$$

Les  $x_n$  sont donc les itérés de  $x_0$  ramenés sur la sphère unité:  
 $\|x_n\|^2 = (x_n, x_n) = 1.$

On a

$$\begin{aligned} (x_{q+2}, x_q) &= \frac{1}{n_{q+2}} (Ax_{q+1}, x_q) = \frac{1}{n_{q+2}} (x_{q+1}, Ax_q) = \\ &= \frac{n_{q+1}}{n_{q+2}} (x_{q+1}, x_{q+1}) = \frac{n_{q+1}}{n_{q+2}} \end{aligned}$$

et en vertu de l'inégalité de Schwartz, ces produits scalaires, ou cosinus, sont  $\leq 1$ .

D'où  $n_1 \leq n_2 \leq \dots$ .

On trouverait sans peine la relation

$$(x_{q+2p}, x_q) = \frac{n_{q+1}}{n_{q+p+1}} \dots \frac{n_{q+p}}{n_{q+2p}}.$$

Enfin l'on a

$$\|x_{q+2p} - x_q\|^2 = 2 - 2(x_{q+2p}, x_q).$$

Soit  $n = \lim n_i$ ,  $n$  est fini ou infini, et posons

$$\varpi = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_2}{n} \cdot \frac{n_3}{n} \dots$$

Dès lors, deux cas sont possibles:

a)  $\varpi \neq 0$  alors

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (x_{q+2p}, x_q) = \frac{n_{q+1}}{n} \cdot \frac{n_{q+2}}{n} \dots$$

et

$$\|x_{q+2p} - x_q\| < \varepsilon$$

pourvu que  $q$  soit assez grand quel que soit  $p$ . La suite des itérés  $x_{2n}$  pairs et la suite des itérés impairs  $x_{2n+1}$  convergent fortement.

b)  $\varpi = 0$ ; alors, que  $n$  soit fini ou infini, l'on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x_{q+2p}, x_q\| > \sqrt{2} - \eta$$

quel que soit  $q$ . L'ensemble des itérés n'est pas compact, il n'admet aucun point d'accumulation pour la convergence forte.

En résumé, deux cas seulement sont possibles:

ou bien les suites  $x_{2n}$  et  $x_{2n+1}$  convergent fortement ( $\varpi \neq 0$ ),  
ou bien l'ensemble  $x_n$  n'est pas compact pour la convergence forte.

Si l'opérateur  $A$  est « complètement continu », alors  $\omega \neq 0$ .

Cette étude sera développée dans un article à paraître dans les *Commentarii Mathematici Helvetici* (vol. 15). Quant au produit infini  $\omega$  nous l'avons déjà introduit dans le cas particulier des noyaux symétriques de Fredholm dans un article paru en 1925.

19. — A. PFLUGER (Fribourg). *Sur la répartition des zéros des fonctions entières.* — Soit  $G(z)$  une fonction entière du type moyen de l'ordre  $\rho$ ,  $H(\varphi)$  son type angulaire (Strahltypus). La famille de droites  $x \cdot \cos \rho\theta + y \cdot \sin \rho\theta = H(\theta)$  ( $\theta$  variable) enveloppe une courbe convexe, appelée *diagramme indicateur* (Indikatordiagramm). Soit  $\mathcal{L}(\varphi)$  la longueur de l'arc  $0 \leq \theta < \varphi$ . Nous considérons les ensembles de zéros de la fonction entière pour lesquels

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \varphi)}{r^\rho} = N(\varphi)$$

existe quel que soit  $\varphi$ ;  $n(r, \varphi)$  désigne le nombre des zéros de l'ensemble en question qui sont situés dans le secteur  $0 \leq \arg z < \varphi$ ,  $|z| \leq r$ . Nous prenons celui de ces ensembles qui est le plus ample et nous l'appelons la *partie mesurable* des zéros,  $N(\varphi)$  est appelé sa *mesure*. On a alors:

$$2\pi \cdot N(\varphi) \leq \mathcal{L}(\varphi),$$

c'est-à-dire le produit par  $2\pi$  de la mesure des zéros dans un angle ne dépasse pas l'arc correspondant du diagramme indicateur.

La méthode de démonstration repose essentiellement sur l'étude des fonctions entières ayant une répartition mesurable de zéros (Cf. *Comm. Math. Helv.*, 11, 180-214). Soit  $g(z)$  une telle fonction, dont la répartition des zéros coïncide avec la partie mesurable de  $G(z)$  dans l'angle en question, et  $l(\varphi)$  l'arc (fonction de  $\varphi$ ) de son diagramme indicateur. On a alors  $2\pi \cdot dN(\varphi) = dl(\varphi)$  et  $d\mathcal{L}(\varphi) - dl(\varphi) \geq 0$ , parce que  $\frac{G(z)}{g(z)}$  est une fonction entière. Notre affirmation résulte de là.

*Remarque:* J'ai appris postérieurement que le résultat ci-dessus est déjà démontré par B. LÉVINE dans *Rec. math. Moscou*, t. 2.

*Réunion de Sion, 30 août 1942.*

---

La Société mathématique suisse a tenu sa 31<sup>e</sup> assemblée annuelle à Sion, le 30 août 1942, en même temps que la 122<sup>e</sup> session de la Société helvétique des Sciences naturelles. Les communications scientifiques, au nombre de onze, ont fait l'objet de deux séances présidées par M. le professeur G. DE RHAM, vice-président, en remplacement de M. le professeur B. BUCHNER, président, empêché par un service militaire.

1. — P. NOLFI (Zurich). *Exposé de phénomènes stochastiques à l'aide de la théorie des probabilités.* — L'application de la théorie des probabilités aux problèmes de la statistique se heurte à de grosses difficultés. C'est ainsi que les problèmes pratiques ne mènent pas à des probabilités qui sont en tout cas les mêmes, comme l'exige la théorie. Les nombreuses propositions ayant en vue l'élimination de ces insuffisances de la théorie sont encore fort discutées. En outre, l'exposé courant de la théorie des probabilités de phénomènes statistiques donne toujours lieu à des contradictions logiques, ainsi par exemple en ce qui concerne le choix de l'unité de temps. Par une autre interprétation de l'événement réel, qui tient aussi compte des découvertes les plus récentes relatives à la réalité effective, on acquiert un exposé mathématique qui ne présente précisément plus les imperfections mentionnées. En vertu de cette interprétation, une probabilité déterminée est adjointe à chaque phénomène présomptif pour chaque moment de son apparition possible. Par un passage à la limite, sur la base duquel sont établies les probabilités continues, on acquiert sous réserve de l'observation des règles générales de l'enchaînement, suivant la manière dont est posé le problème, des expressions mathématiques générales, qui permettent de trouver les probabilités cherchées pour n'importe quel genre d'ensembles statistiques. En examinant les cas spéciaux, on trouve des formules connues, comme par exemple celle de Poisson pour l'évaluation de la probabilité d'événements rares qui, sous ce rapport, apparaît comme solution exacte d'un problème déterminé, c'est-à-dire par conséquent des résultats auxquels sont arrivés par d'autres moyens Borel, Lundberg et Khinchine. Les résultats obtenus en mathématiques d'assurance à l'aide de la conception de l'intensité ressortent également, comme cas spéciaux, de cette façon générale d'envisager la question.

2. — Alexandre PREISSMANN (Bâle). *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann.* — Alors que les propriétés globales (connexion topologique: allure des géodésiques, etc.) des surfaces dont la courbure garde un signe constant commencent à être bien connues; il n'en est pas de même des espaces de Riemann. La présente communication est une contribution à l'étude des espaces de Riemann de courbure partout *négative*. Nous sommes parvenus à démontrer dans ce cas les théorèmes suivants:

I. Un espace de Riemann dont le groupe fondamental est cyclique possède au plus une géodésique fermée et dans le cas général il existe au plus une géodésique fermée de chaque classe d'homotopie.

II. Si une géodésique fermée fait partie de la classe d'homotopie  $a$ , tous les sous-groupes abéliens du groupe fondamental qui contiennent  $a$  sont des groupes cycliques.

III. Tous les sous-groupes abéliens d'un espace *fermé* sont cycliques.

Ce dernier théorème montre en particulier que le produit topologique de deux variétés fermées ne saurait être métrisé par une métrique de courbure partout négative.

Ces théorèmes s'appliquent au cas particulier des formes spatiales hyperboliques.

3. — B. ECKMANN (Zurich). *Solutions continues de système d'équations linéaires.* — Dans un système

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0, \quad i = 1, \dots, m < n \quad (1)$$

de  $m$  équations linéaires homogènes à  $n$  inconnues, nous donnons aux coefficients  $a_{ik}$  toutes les valeurs réelles pour lesquelles la matrice  $(a_{ik})$  a le rang  $m$ . Nous cherchons une solution valable et continue pour toutes ces valeurs des coefficients et qui ne soit jamais triviale, c'est-à-dire un système de fonctions  $x_k = f_k(a_{11}, \dots, a_{nm})$  réelles et continues de ces coefficients qui satisfassent, pour toutes les valeurs admises, aux relations  $\sum a_{ik} f_k = 0$ , et qui ne s'annulent jamais simultanément. Nous appelons ceci *une solution continue du système (1)*. Alors notre problème s'énonce ainsi: Pour quels nombres  $n$  et  $m$  le système a-t-il une solution continue?

Des cas particuliers de telles solutions nous sont donnés (pour  $m = n - 1$  et pour  $m = 2, n = 7$ ) par le produit vectoriel connu de  $m$  vecteurs dans l'espace à  $n$  dimensions; également on connaît une solution particulièrement simple pour  $m = 1$  et  $n$  pair. On peut, par contre, en se basant sur des théorèmes topologiques simples,

démontrer qu'il n'y a pas de solutions continues lorsque  $n - m$  est pair. Mais la réponse complète à notre question nous est inconnue, et elle ne semble pas être simple pour les cas restants ( $n - m$  impair et  $m \geq 2$ ). Pourtant nous pouvons, à l'aide de méthodes topologiques moins élémentaires, démontrer que le système n'a pas de solutions continues pour  $n - m = 3$  ou  $7$  et  $m \geq 2$ .

La démonstration de ce théorème se base sur la théorie générale des espaces fibrés et comprend surtout la détermination de quelques groupes d'homotopie de certaines variétés  $V_{n,m}$  (ce sont les variétés de toutes les matrices orthogonales à  $n$  colonnes et  $m$  lignes); par exemple le troisième groupe d'homotopie de  $V_{5,3}$  est cyclique d'ordre infini, et le septième de  $V_{9,3}$  est cyclique d'ordre 4. Les représentations continues des sphères, les propriétés d'homotopie des groupes orthogonaux et le parallélisme bien connu sur les sphères à trois et sept dimensions y jouent un certain rôle. D'ailleurs, tout notre problème a de nombreux rapports avec des questions topologiques et algébriques actuelles, entre autres avec la suivante: sur quelles sphères est-il possible d'introduire une multiplication continue (comme celle dans un groupe, mais pas nécessairement associative), possédant un élément unité? Nous reviendrons sur ces questions ainsi que sur les détails des énoncés et des démonstrations dans un travail en préparation. (Le mémoire paraîtra dans les *Comment. Math. Helv.*, vol. 15.)

4.— HEINZ HOPF (Zurich). *Sur les espaces qui admettent des groupes de transformations avec un domaine fondamental compact.* — Pour une variété ouverte, on peut définir d'une manière naturelle les « points à l'infini » (H. FREUDENTHAL, *Math. Zeitschrift*, 33, 1931, 692-713). Avec les méthodes du travail cité de Freudenthal, le théorème suivant se laisse facilement démontrer:

*Une variété ouverte, qui admet un groupe discontinu de transformations topologiques avec un domaine fondamental compact, possède ou bien un point à l'infini, ou bien deux points à l'infini, ou bien un ensemble de points à l'infini de la puissance du continu.*

En particulier, une variété de recouvrement régulière d'une variété close est ou bien close ou bien du type décrit. Par exemple, la sphère à  $n$  dimensions pointée trois fois ne peut pas se présenter comme variété de recouvrement universelle d'une variété close — c'est la réponse à une question posée il y a longtemps par M. Threlfall qui fut à l'origine de la recherche discutée ici.

Ce théorème possède, dans la ligne de la théorie de l'homotopie de Hurewicz, le corollaire suivant:

*Le deuxième groupe d'homotopie d'une variété close à trois dimensions ou bien se réduit à zéro, ou bien est cyclique infini, ou bien est la somme directe d'une infinité dénombrable de groupes cycliques infinis.*

5. — H. HADWIGER (Berne). *Sur la convergence et une extension du théorème d'Abel.* — Dans la *théorie des procédés de limitation* il est indiqué d'adopter un formalisme permettant de concevoir d'un point de vue unique les suites et les fonctions. Les suites sont subordonnées aux fonctions, en ce sens qu'une suite est représentée par une *fonction en escalier*. La suite est alors convergente ou divergente en même temps que la fonction correspondante. Afin de caractériser le *comportement* d'une fonction  $F(t)$  d'un paramètre réel  $t$  lorsque celui-ci tend vers la frontière supérieure  $r$  de l'intervalle dans lequel  $F(t)$  est définie, on introduit la notion de « valeur finale » (Endwert). Le nombre complexe  $a$  est dit valeur finale de  $F(t)$  pour  $t$  tendant vers  $r$ , lorsque pour un domaine circulaire quelconque  $U(a)$  de centre  $a$ , et un intervalle quelconque  $V(r)$  à la gauche de  $r$ , il existe toujours une valeur de  $t$  contenue dans  $V(r)$ , telle que la valeur correspondante  $F(t)$  soit comprise dans  $U(a)$ .

La fonction  $F(t)$  prend des valeurs différant de  $a$  d'aussi peu qu'on veut, un nombre infini de fois, lorsque  $t$  tend vers  $r$ .

Considérons l'ensemble  $A$  des valeurs finales (Endwertmenge). Nous proposons la classification suivante, basée sur la nature de l'ensemble  $A$ , en ce qui concerne le comportement de la fonction  $F(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $r$ . Il est dit :

- a) *déterminé* (bestimmt) ou *indéterminé* (unbestimmt) selon que l'ensemble  $A$  se compose d'un ou de plusieurs points;
- b) convergent ou divergent selon que l'ensemble  $A$  est borné ou non.

Il en résulte quatre possibilités du comportement de  $F(t)$  : 1) *déterminé* convergent; 2) *indéterminé* convergent; 3) *déterminé* divergent; 4) *indéterminé* divergent.

Sur ces considérations se fonde la perspective d'une extension du théorème d'Abel (Abelscher Stetigkeitssatz).

Soit la série entière

$$F(t) = \sum_0^{\infty} a_n t^n$$

convergente dans un cercle de rayon 1 et telle que

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour que la série  $\sum_0^{\infty} a_n$  converge vers l'ensemble des valeurs finales  $A$ , il faut et il suffit que la fonction  $F(t)$  converge également vers  $A$  lorsque  $t$  tend vers 1.

Dans ce théorème, il n'est pas possible de remplacer comme dans la réciproque du théorème classique la condition  $o$  par une condition  $O$ .

6. — R. WAVRE (Genève). *Sur les opérateurs hermitiens et la décomposition spectrale.* — Nous indiquerons ici, en résumé, les développements donnés à notre note de la séance de Bâle. On trouvera plus de détails dans trois notes parues entre temps dans le *Compte rendu des séances de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève*, 1940.

Soit  $A(f)$  un opérateur hermitien supposé défini pour tout élément  $f_0$  d'un espace  $E$  isomorphe de l'espace d'Hilbert et de l'espace fonctionnel. Soient  $A^r(f)$  ses itérés. Nous les normalisons, en posant :

$$l_0 l_1 l_2 \dots l_r f_r = A^r(f_0) ; \quad l_0 = \|g_0\| , \quad \|g_r\| = 1 ;$$

pour  $r = 1, 2, \dots$

on a les relations de Kellogg

$$0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots$$

Nous posons :

$$l = \lim l_r ; \quad \varpi = l_0 \frac{l_1 l_2}{l} \dots ;$$

on a

$$0 \leq \varpi(f_0) \leq l_0 .$$

Si l'opérateur est complètement continu l'on a dans tout  $E$ ,  $\varpi \neq 0$  ; mais cette dernière condition est plus générale et répond à des opérateurs qui recouvrent une partie de la théorie des équations intégrales singulières. On a, en effet, les propriétés suivantes :

I. Si  $\varpi(f_0) \neq 0$ , les itérés  $f_{2r}$  convergent fortement vers une limite  $f$  de  $E$  qui est solution de l'équation homogène

$$A^2(f) = l^2 f ;$$

nous dirons que  $f$  est solution propre,  $l$  est donc une valeur propre. Si  $\varpi(f_0) = 0$ , les itérés  $f_r$  convergent faiblement vers zéro.

II. Si  $f = \varphi + \psi$ , des trois nombres  $l$  liés à  $f, \varphi, \psi$ , aucun n'est supérieur aux deux autres.

III. Soient  $\nu_i$  une suite de valeurs propres distinctes,  $\nu$  leur borne supérieure, et  $\psi_i$  les vecteurs propres correspondants. Posons :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i ; \quad \sum |a_i|^2 \text{ convergente ;} \quad \text{alors } l(\psi) = \nu .$$

Si  $\nu = \hat{=}$  à un  $\nu_i$ , borne atteinte,  $\varpi(\psi) \neq 0$ , sinon  $\varpi(\varphi) = 0$ . Il résulte de là que pour un opérateur où  $\varpi \neq 0$  dans tout  $E$ , les valeurs propres peuvent être « bien ordonnées » par ordre de grandeurs

décroissantes. Elles forment donc une suite numérotable au moyen d'une infinité dénombrable d'ordinaux transfinis de Cantor de la classe II.

IV. La parenthèse indiquant le produit scalaire, on a  $(f, f_0) = \bar{\omega}(f_0)$  et  $f_0 - \bar{\omega}(f) f$  est orthogonal à  $f$ . Si  $g$  est un vecteur propre quelconque et si  $f_0$  est orthogonal à  $g$ , tous les itérés  $f_r$  sont orthogonaux à  $g$  ainsi que leur limite forte (ou faible). Ces lemmes précisés, voici comment peut se faire une décomposition d'un élément quelconque  $f = f_0^0$  suivant les éléments propres pour un opérateur à  $\bar{\omega} \neq 0$ . On posera :

$$f_0^0 = \bar{\omega}(f_0^0) f_0^0 + f_0^1, \dots, \quad f_0^\alpha = \bar{\omega}(f_0^\alpha) f_0^\alpha + f_0^{\alpha+1}, \dots$$

transfiniment s'il le faut  $\alpha = 1, 2, 3, \dots \omega, \omega + 1, \dots 2\omega, 2\omega + 1 \dots$ . On a  $l^{\alpha+1} < l^\alpha$ , pour les valeurs propres liées aux  $f_0^\alpha$ . Puis :

$$f = \sum_{\alpha} \bar{\omega}(f_0^\alpha) f_0^\alpha + h, \quad (1)$$

$$A^2(f) = \sum_{\alpha} l^{\alpha^2} \bar{\omega}(f_0^\alpha) l^\alpha, \quad (2)$$

$h$  étant un antécédent de zéro:  $A(h) = 0$ . Ainsi nous mettons en évidence directement les fonctions  $f_0^\alpha$  en lesquelles  $f$  se décompose effectivement, et des restes successifs  $f_0^\alpha$ .

Si, poursuivant la réduction, l'un des restes est nul, alors  $h = 0$ , la réduction s'arrête d'elle-même; dans le cas contraire seulement on a  $\lim l^\alpha = 0$ . Dans le cas des opérateurs complètement continus, il n'y a pas lieu d'introduire les nombres transfinis et l'on a  $\lim l^n = 0$  dans le cas où il y a une infinité de valeurs propres.

Donc, la décomposition spectrale d'un élément de  $E$  peut se faire, pour tout opérateur « régulier » ( $\bar{\omega} \neq 0$ ) par simple itération de cet élément et de ses restes successifs. Dans le cas des opérateurs complètement continus (1) exprime le théorème d'Hilbert-Schmidt de la théorie des équations intégrales.

Si l'on considère maintenant l'équation linéaire non homogène :

$$\varphi = f + \frac{1}{\nu} A(\varphi), \quad \text{on a} \quad \varphi = f^x + \frac{1}{\nu^2} A^2(\varphi), \quad \text{avec} \quad f^x = f + \frac{1}{\nu} A(f). \quad (3)$$

Une solution est donnée par :

$$\varphi = f^x + \sum_{\alpha} \frac{l^{\alpha^2} f^{x\alpha}}{\nu^2 - l^{\alpha^2}} f^\alpha, \quad \text{avec} \quad f^x = \sum_{\alpha} f^{x\alpha} f^\alpha + h, \quad A(h) = 0; \quad (4)$$

$\alpha$  parcourant encore ici la suite (éventuellement transfinie) des valeurs  $\alpha$ . Si  $|\nu|$  est différent des  $l^\alpha$  et de leur point d'accumulation, (4) fournit la solution de (1), qui est unique. Si  $|\nu|$  répond à une valeur propre qui n'est pas un  $l^\alpha$ , alors on peut ajouter à  $\varphi$  tout élément propre de valeur propre  $\nu$ . Si  $|\nu|$  est point d'accumulation des  $l^\alpha$  sans que  $|\nu|$  soit un  $l^\alpha$ , alors la série (4) fournit encore une solution, pourvu que la série suivante converge :

$$\sum_{\alpha} \left| \frac{f^{x\alpha}}{|\nu| - l^\alpha} \right|^2.$$

Et si  $\nu$  est une valeur propre autre qu'un des  $l^\alpha$ , alors on peut encore ajouter la solution la plus générale correspondant à  $\nu$ .

Avec le paramètre habituel de Fredholm, on aurait donc

$$\varphi(\lambda) = f^x + \lambda^2 \sum_{\alpha} \frac{f^{x\alpha}}{\lambda_{\alpha}^2 - \lambda^2} f^{\alpha},$$

en  $\lambda$  cette solution admet comme seules singularités, les pôles  $\lambda_{\alpha}$  et les points singuliers limites des pôles, correspondant à l'épuisement d'une suite dans les transfinis. Ces singularités seront, au total, encore numérotables par les ordinaux transfinis de classe II. M. J.-P. Vigier a étendu cette méthode aux opérateurs hermitiens gauches et a reconstruit de cette manière, très rapide, les développements en série de fonctions biorthogonales. Notre méthode permet donc de retrouver très rapidement une grande partie de la théorie des équations intégrales et de la théorie des systèmes d'équations linéaires à matrices hermitiennes et se trouve dépouillée de tout appareil algébrique.

Il est intéressant aussi d'étudier les fonctionnelles  $l(f)$  et  $\omega(f)$  qui sont semi-continues dans tout l'espace E.

7. — Max GUT (Zurich). *Zur Theorie der Klassenkörper der Kreiskörper, insbesondere der Strahlklasskörper der quadratisch-imaginären Zahlkörper.* — Paraîtra dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 15.

8. — Sophie PICCARD (Neuchâtel). *Intersection d'un ensemble linéaire parfait avec l'une quelconque de ses translations.*

9. — Ed. BATSCHELET (Bâle). *Ueber den absoluten Betrag der Wurzeln algebraischer Gleichungen.*

10. — E. STIEFEL (Zurich). *Ueber die Berechnung der Charaktere in kontinuierlichen Gruppen.*

11. — K. BLEULER (Genf). *Ueber die Positivität von Green'schen Funktionen.*

*Réunion de Schaffhouse, 29 août 1943.*

---

La Société mathématique suisse a tenu sa 32<sup>e</sup> assemblée annuelle à Schaffhouse, le 29 août 1943, sous la présidence de M. le professeur P. BUCHNER, en même temps que la 123<sup>e</sup> session annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles.

*Séance administrative.* — Le Comité pour les années 1944 et 1945 a été constitué comme suit: MM. G. DE RHAM (Lausanne), président; M. GUT (Zurich), vice-président; H. HADWIGER (Berne), secrétaire-caissier.

MM. A. SPEISER, R. FUETER et R. WAVRE ont été confirmés, pour une nouvelle période de six ans, dans leurs fonctions de président, de secrétaire général et de secrétaire adjoint du Comité de rédaction des *Commentarii Mathematici Helvetici*.

Pour cette même période 1944-1949, le Comité *Steiner-Schläfli* se composera de MM. L. KOLLROS (Zurich), président, J. J. BURKHARDT (Zurich), F. GONSETH (Zurich), H. HADWIGER (Berne), A. LINDER (Berne), W. SCHERRER (Berne), E. STIEFEL (Zurich), A. STOLL (Zurich) et de M. A. HÄUSERMANN (Zurich), suppléant.

La Société a conféré le titre de Membre honoraire à M. le professeur C. CARATHÉODORY, à l'occasion du 70<sup>e</sup> anniversaire du savant mathématicien.

La *partie scientifique* de la réunion a été consacrée aux neuf communications ci-après.

1. — Beno ECKMANN (Lausanne). *Sur les groupes monothétiques.* — S'il existe dans le groupe topologique  $G$  un élément  $x$  tel que ses puissances soient partout denses dans  $G$ , ce groupe est dit *monothétique*, et on appelle  $x$  un générateur de  $G$ ; il est clair qu'un tel groupe est abélien. Pour un groupe discret, « monothétique » a la même signification que « cyclique ».

Si  $G$  est un groupe abélien compact, on peut se servir des caractères de  $G$  (ce sont les homomorphismes continus de  $G$  dans le groupe multiplicatif  $K$  des nombres complexes de module 1; le caractère qui est identiquement 1 sera dit trivial) et on trouve facilement: *S'il y a dans  $G$  un élément  $x$  tel que pour tout caractère non-trivial  $f$  de  $G$  on ait  $f(x) \neq 1$ , alors le groupe  $G$  est monothétique, engendré par  $x$ .*

Ce critère nous permet, par exemple, de démontrer d'une manière très simple que le toroïde  $T^n$  est monothétique.  $T^n$  est le produit

direct de  $n$  groupes isomorphes au groupe des rotations du cercle (ou de  $n$  groupes  $K$ ); tout élément de ce groupe est donné par  $n$  angles  $2\pi x_1, \dots, 2\pi x_n$ , donc par  $n$  nombres réels  $x_1, \dots, x_n \pmod{1}$ , et si on les choisit tels qu'ils soient incommensurables  $\pmod{1}$ , on obtient un élément générateur de  $T^n$ . C'est un théorème classique, le célèbre « théorème d'approximation de KRONECKER »<sup>1</sup>; notre méthode en donne une démonstration nouvelle et simple.

Le critère s'applique aussi, surtout si on utilise encore la théorie des caractères de PONTRJAGIN<sup>2</sup>, à d'autres groupes abéliens compacts. On démontre ainsi que tout groupe *connexe* de ce genre est monothétique, et qu'il en est de même pour les groupes  $n$ -adiques (qui forment des espaces complètement discontinus).

WEYL a précisé le théorème de Kronecker, en introduisant la notion d'équipartition<sup>3</sup>; d'une manière analogue on peut démontrer que les puissances d'un générateur du groupe monothétique compact  $G$  sont toujours *également réparties* dans  $G$ , c'est-à-dire ne sont pas seulement partout denses dans  $G$ , mais ont partout la *même* densité, au sens du volume invariant de  $G$ . On peut même établir le théorème suivant, où on ne suppose pas d'avance que le groupe  $G$  soit monothétique, ni même qu'il soit abélien: *Si toute représentation irréductible (non triviale) du groupe compact  $G$  fait correspondre à l'élément  $x$  de  $G$  une matrice qui n'a pas la valeur propre 1, alors les puissances de  $x$  sont également réparties dans  $G$  (donc partout denses,  $G$  est donc monothétique).* — La démonstration utilise le fait que les représentations irréductibles forment un système complet (théorème de Peter-Weyl); elle se simplifie naturellement, si on se borne au cas d'un groupe fini, où notre théorème présente encore un certain intérêt.

2. — Max GUT (Zürich). *Zur Theorie der Strahlklassenkörper der quadratisch reellen Zahlkörper.* — Si l'on choisit convenablement le nombre entier, rationnel et positif  $m$ , tout corps de nombres absolument abélien est sous-corps du corps des  $m^{\text{ièmes}}$  racines de l'unité et nous appelons dès lors un tel corps un corps *circulaire*. Soit  $k$  un corps circulaire,  $\mathfrak{f}$  un idéal entier de  $k$ , nous désignons par  $K(\mathfrak{f})$  le corps abélien relatif, qui appartient au groupe multiplicatif complet mod.  $\mathfrak{f}$  des idéaux de  $k$ , et par  $k(\mathfrak{f})$  le plus grand sous-corps circulaire contenu dans  $K(\mathfrak{f})$ . En particulier  $K(1)$  désigne le corps de classes de HILBERT,  $k(1)$  son plus grand sous-corps circulaire. Dans un travail antérieur (« Zur Theorie der Klassenkörper der Kreiskörper, insbesondere der Strahlklassenkörper der quadratisch imaginären Zahlkörper », *Comment. Math. Helvet.*, vol. 15, 1942/43, p. 81) nous

<sup>1</sup> Voir par exemple J. F. KOKSMA, *Diophantische Approximationen* (Berlin, 1936), p. 83.

<sup>2</sup> L. PONTRJAGIN, *Topological groups* (Princeton, 1939), chap. V.

<sup>3</sup> H. WEYL, Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. *Math. Annalen*, Bd. 77 (1916), p. 313.

avons déterminé  $k(1)$  pour un corps circulaire  $k$  quelconque. Dans le cas où  $k$  est un corps quadratique imaginaire, nous avons de plus déterminé  $k(\mathfrak{f})$  pour un idéal quelconque  $\mathfrak{f}$ , indiqué des théorèmes relatifs à la structure de  $K(\mathfrak{f})$ , enfin appliqué cette théorie à la décomposition des équations de division de la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Dans un travail ultérieur qui est dédié à M. C. CARATHÉODORY à l'occasion de son 70<sup>e</sup> anniversaire et qui paraîtra dans les *Comment. Math. Helvet.*, vol.16, 1943/44, nous avons effectué les recherches analogues pour un corps de base quadratique réel  $k$ . Dans ce cas  $k$  contient une unité fondamentale, c'est pourquoi la structure de  $K(\mathfrak{f})$  est en général de toute autre nature que dans le cas d'un corps de base quadratique imaginaire.

3. — H. HADWIGER (Bern). *Ein Ueberdeckungssatz des  $R_n$ .*

4. — R. WAVRE (Genève). *Les hermitiens limites d'hermitiens réguliers. Spectre et théorie du rang.* — Soient  $x$  un point de l'espace  $E$  de VON NEUMANN (espace d'Hilbert, espace fonctionnel) et  $A(x)$  un opérateur hermitien borné; enfin  $A^q$  ses itérés.

Il existe un nombre  $l$  qui jouit des propriétés suivantes

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\|A^q x\|}{\lambda^q} = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \lambda < l \\ \text{nombre fini} & \text{si } 0 < l \leq \lambda \end{cases}$$

et  $l = 0$  si  $\|Ax\| = 0$ . Nous appellerons  $l(x)$  le rang de  $x$ . Chaque point de  $E$  possède un rang et un seul, et nous avons montré que  $l(x)$  est une fonctionnelle de  $x$  semi-continue inférieurement<sup>1</sup>.

Soit, alors,  $E_\nu$  l'ensemble des points de  $E$  de rang  $l \leq \nu$ .  $E_\nu$  est une variété linéaire fermée (un sous-espace) et nous désignerons également par  $E_\nu$  le projecteur de  $E$  sur  $E_\nu$ .

On a alors

$$A^2(x) = \int_0^{+\infty} \nu^2 dE_\nu(x) .$$

C'est la décomposition spectrale de l'opérateur  $A^2$ . La décomposition de  $A$  ne présente pas de difficulté, mais exige des explications plus longues.

Le spectre de  $A^2$  est la fermeture  $e + e'$  de l'ensemble  $e$  des rangs  $l^2$ . Cette proposition, évidente pour les opérateurs « réguliers », affirmée pour les opérateurs bornés par M. J.-P. VIGIER, s'établit très rapidement à partir de la théorie du rang.

<sup>1</sup> R. WAVRE, L'itération directe des opérateurs hermitiens, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 16, fasc. 1.

5. — W. SCHERRER (Bern). *Zum Problem der Trägheit in der Wellenmechanik.*

6. — W. HABICHT (Schaffhausen). *Ueber Lösungen von algebraischen Gleichungssystemen.*

7. — Walter NEF (Zürich). *Hyperkomplexe Methoden zur Integration partieller Differentialgleichungen.* — Auf einer  $(n - 1)$ -dimensionalen Fläche  $R$  seien die Werte

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \psi_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

der Ableitungen eines Integrals der hyperbolischen oder ultrahyperbolischen Differentialgleichung

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j^2} = 0 \quad (x_j = \pm 1) \quad (1)$$

gegeben. Gesucht ist  $\Phi$  in einer noch zu beschreibenden Umgebung  $U$  von  $R$ .

Wir führen eine Cliffordsche Algebra ein, in welcher  $n$  Basisgrößen  $e_1, \dots, e_n$  liegen, die den Relationen genügen:

$$e_j^2 = x_j \quad (j = 1, \dots, n), \quad e_j e_k = -e_k e_j \quad (j, k = 1, \dots, n, j \neq k) .$$

Eine Funktion

$$\omega = f(z) = \sum_{j=1}^n f_j(x_1, \dots, x_n) e_j$$

der Variablen

$$z = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

heisst regulär, wenn

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} e_k = 0$$

ist. Man kann beweisen, dass für jedes Integral  $\Phi$  von (1) die Funktion

$$\omega = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} e_j$$

regulär ist. Hiervon gilt auch die Umkehrung. Die Randwertaufgabe ist also gelöst, wenn wir in  $U$  eine reguläre Funktion finden können, die auf  $R$  die Randwerte

$$\psi = \sum_{j=1}^n \psi_j e_j$$

annimmt.

Nun sei  $R$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche und  $U$  eine Umgebung von  $R$  von der Art, dass jeder erzeugende Strahl des charakteristischen Kegels irgendeines Punktes von  $U$  genau einen Schnittpunkt mit  $R$  gemeinsam hat und so, dass der zwischen der Spitze des ch. K. und dem Schnittpunkt mit  $R$  gelegene Teil des Strahls ganz zu  $U$  gehört. Dann gilt, wenn  $f(z)$  eine in  $U$  und auf  $R$  reguläre Funktion ist, für jeden Punkt  $z$  von  $U$ :

$$f(z) = A \int_{\dot{S}(z)} f(\zeta) d\Sigma \frac{\overline{(\zeta - z)}}{|\zeta - z|^{n-1}} + B \int_{\dot{K}(z)} d\sigma (f(\zeta) \frac{(\zeta - z) \overline{(\zeta - z)} - |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^{n+1}}). \quad (2)$$

Dabei ist  $S(z)$  der Durchschnitt des zu  $z$  gehörigen ch. K. mit  $R$  und  $K(z)$  das zwischen  $S(z)$  und  $R$  gelegene Stück des ch. K.  $A$  und  $B$  sind Konstanten. Umgekehrt ist jede Funktion  $f(z)$ , die der letzten Gleichung genügt, regulär. Die von uns gesuchte Funktion ist also eine Lösung der linearen Integralgleichung

$$f(z) = J(z) + B \int_{\dot{K}(z)} d\sigma f(\zeta) \frac{(\zeta - z) \overline{(\zeta - z)} - |\zeta - z|^2}{|\zeta - z|^{n+1}}, \quad (3)$$

wenn wir setzen:

$$J(z) = A \int_{\dot{S}(z)} \psi d\Sigma \frac{\overline{(\zeta - z)}}{|\zeta - z|^{n-1}}.$$

Wenn die Lösung  $f(z)$  von (3) auf  $R$  mit  $\psi$  übereinstimmt, so ist  $f(z)$  zugleich eine Lösung von (2), also regulär und die Aufgabe ist gelöst. Stimmt die Lösung  $f(z)$  von (3) auf  $R$  nicht mit  $\psi$  überein, so ist die Aufgabe nicht lösbar.

8. — Edith MÜLLER (Zürich). *Maurische Ornamentik*. — Gruppentheoretische Untersuchungen der Maurischen Ornamente aus der Alhambra in Granada (Inaugural Dissertation, Universität Zürich, Buchdruckerei Baublatt AG., Rüslikon, 1944).

9. — A. HÄUSERMANN (Zürich). *Ueber die Berechnung singulärer Moduln bei Ludwig Schläfli.* — In diesem Referat wurde auf bisher völlig unbekannte allgemeine und numerische Resultate des Berner Mathematikers L. SCHLÄFLI (1814-1895) im Gebiet der singulären Moduln hingewiesen.

Auf Anregung von Herrn Prof. FUETER wurde der Nachlass Schläflis noch einmal gesichtet und alle Manuskripte sorgfältig zusammengestellt, die allgemeine Betrachtungen und numerische Berechnungen von singulären Moduln, von Modulgleichungen und von Modularfunktionen enthielten. Das erste Aussondern geschah mit dem neuen Sachkatalog von Herrn Prof. BURCKHARDT.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in der auf den Herbst erscheinenden Inaugural-Dissertation des Referenten ausführlich dargestellt <sup>1</sup>.

---

*Réunion de Sils, en Engadine, 3 septembre 1944.*

---

La Société mathématique suisse a tenu sa 33<sup>e</sup> assemblée annuelle le 3 septembre 1944, à Sils, en Engadine, sous la présidence de M. le professeur G. DE RHAM, en même temps que la 124<sup>e</sup> session annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative*, la Société a conféré le titre de membre honoraire à M. Gustave DUMAS, professeur honoraire à l'Université de Lausanne.

1. — Julien MALENGREAU (Bruxelles). *Sur quelques relations entre grandeurs de l'espace euclidien.* — L'auteur montre, par des exemples, que si en partant des postulats classiques de la géométrie élémentaire on arrive à démontrer la relation de Stewart, réciproquement en partant de cette dernière on arrive à démontrer les postulats classiques. Cette réversibilité de la géométrie est mise en évidence en utilisant la notion du  $n$ -point parfait, ensemble de  $n$  points tels que la distance entre deux d'entre eux est toujours la même. Une formule très simple relie cette distance commune aux distances entre un point quelconque de l'espace déterminé par le  $n$ -point parfait considéré et les points de ce dernier. De cette formule on peut déduire que l'espace

---

<sup>1</sup> Inaugural-Dissertation, Universität Zürich, Gebr. Leemann & Co., 1944.

déterminé par un  $n + 1$  — point parfait est plus vaste que celui déterminé par un  $n$ -point parfait. L'auteur déduit de ces considérations que l'on peut commencer la géométrie analytique, indépendamment de la géométrie élémentaire, en définissant l'espace euclidien déterminé par un  $n$ -point parfait comme le lieu de tous les points  $S$  tels que si  $A_m, A_n$  et  $A_p$  sont trois de ses points reliés entre eux par la relation  $\Sigma(\pm A_m A_n) = 0$  la valeur absolue de la somme des quotients  $(\pm A_m A_n) \times \frac{SA_p}{SA_m \times SA_n}$  est égale à la valeur absolue du produit de ces quotients.

L'étude analytique de ce lieu intégral peut se faire sans emploi de coordonnées, dont la notion sera introduite seulement à partir de l'étude des lieux qui ne comprennent qu'une partie des points de l'espace euclidien.

2. — Sophie PICCARD (Neuchâtel). — *Sur les couples de substitutions qui engendrent un groupe régulier.* — Soit  $m$  un entier  $\geq 2$ ,  $k$  un entier  $> 1$ ,  $S$  une substitution régulière d'ordre  $m$  et de degré  $km$ ,  $T$  une substitution régulière du même degré et portant sur les mêmes éléments que  $S$  et soit  $(S, T)$  le groupe engendré par les deux substitutions  $S$  et  $T$ . Nous dirons que  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p$  s'il existe un entier  $r$  ( $1 \leq r \leq m$ ), tel que  $T$  transforme les éléments de chaque cycle de  $S$  en éléments de  $r$  autres cycles de  $S$  et nous dirons dans ce cas que  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p_r$ .

Soit

$$S = (1, 2 \dots m)(m + 1, m + 2 \dots 2m) \dots (k - 1)m + 1(k - 1)m + 2 \dots km),$$

soit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & km \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{km} \end{pmatrix}$$

et soit  $t > 1$  l'ordre de  $T$ .

I. Les conditions suivantes sont nécessaires pour que le groupe  $(S, T)$  soit régulier:

1.  $T[S]$  ne transforme aucun élément d'un cycle de  $S[T]$  en un élément du même cycle.

2.  $T[S]$  transforme les éléments de chaque cycle de  $S[T]$  en éléments d'un nombre égal de cycles de  $S[T]$ , autrement dit chacune des substitutions  $S, T$  jouit par rapport à l'autre de la propriété  $p$ .

3. Si  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p_r$  ( $1 \leq r \leq m$ ),  $m$  est un multiple de  $r$  et, si  $T$  transforme au moins un élément d'un cycle  $C$  de  $S$  en un élément d'un second cycle  $C'$  de  $S$ ,  $T$  transforme au total  $m/r$  éléments de  $C$  en éléments de  $C'$ . D'autre part, si  $r > 1$ ,  $T$  ne saurait transformer deux éléments consécutifs d'un cycle de  $S$  en deux

éléments d'un autre cycle de S, ni deux éléments quelconques d'un même cycle de S en deux éléments consécutifs d'un autre cycle de S. Quels que soient l'entier  $r$  ( $1 \leq r \leq m$ ) le cycle  $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$  de S et l'élément  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) de ce cycle, T transforme  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+r}^1$  en deux éléments d'un même cycle de S et  $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{i+r-1}^1$  en éléments de  $r$  cycles différents de S. Il existe un entier  $\mu$  ( $1 \leq \mu \leq m$ ), tel que  $TS^r T^{-1} = S^\mu$ . Cet entier  $\mu$  vérifie les congruences

$$\frac{m}{r} \mu \equiv 0 \pmod{m}$$

et

$$\frac{\mu^t}{r^{t-1}} \equiv r \pmod{m}$$

et on a

$$D(m, \mu) = r$$

et

$$a_{i+jr} \equiv a_i + j\mu \pmod{m^2}, \quad i = 1, 2, \dots, km, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{m}{r} - 1.$$

Si un cycle de T contient des éléments de  $l$  ( $1 \leq l \leq t$ ) cycles de S et de  $l$  seulement, tout cycle de T jouit de la même propriété.

Si  $r > 1$ , quels que soient les cycles  $(b_1 b_2 \dots b_t)$  et  $(c_1 c_2 \dots c_t)$  de T comprenant deux éléments  $b_u$  ( $1 \leq u \leq t$ ) et  $c_v$  ( $1 \leq v \leq t$ ) d'un même cycle de S, si  $c_v \equiv b_u \pmod{r}$ , quel que soit  $j = 1, 2, \dots, t - 1$ , les nombres  $b_{u+j}$  et  $c_{v+j}$  font partie d'un même cycle de S et sont congruents mod.  $r$ . Si T jouit par rapport à S de la propriété  $p_m$ , aucun cycle de T ne saurait contenir plus d'un élément d'un même cycle de S.

II. Quel que soit l'entier  $r \geq 1$ , il existe des couples de substitutions régulières S, T, tels que T jouit par rapport à S de la propriété  $p_r$  et que le groupe (S, T) est régulier.

III. Si T jouit par rapport à S de la propriété  $p_1$ , la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe (S, T) soit régulier c'est que: 1°

$$a_{(i-1)m+j} \equiv a_{(i-1)m+1} + (j-1)\mu \pmod{m^3}, \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

$$j = 2, 3, \dots, m,$$

$\mu$  désignant un entier premier avec  $m$ , tel que  $1 \leq \mu < m$  et que  $\mu^k \equiv 1 \pmod{m}$ , les nombres  $a_{(i-1)m+j}$  faisant tous partie d'un même cycle de S.

<sup>1</sup> Les indices supérieurs à  $m$  doivent être réduits mod.  $m$ .

<sup>2</sup> Les nombres  $a_{(i-1)m+j}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) font tous partie d'un même cycle de S.

<sup>3</sup> L'indice  $k + 1$  doit être remplacé par 1.

2° Il existe une permutation  $i_2, i_3, \dots, i_k$  des nombres  $2, 3, \dots, k$  et  $k$  nombres  $j_1, j_2, \dots, j_k$  de la suite  $1, 2, \dots, m$ , tels que, en posant  $i_1 = 1$ , on ait

$$a_{(i_l-1)m+1} = (i_{l+1} - 1)m + j_{l+1}, \quad l = 1, 2, \dots, k^1,$$

et que

$$\begin{aligned} j_k + \mu j_{k-1} + \mu^2 j_{k-2} + \dots + \mu^{k-1} j_1 &\equiv j_{k-1} + \mu j_{k-2} + \mu^2 j_{k-3} + \dots \\ &+ \mu^{k-1} j_k \equiv \dots \equiv j_1 + \mu j_k + \mu^2 j_{k-1} + \dots + \mu^{k-1} j_2 \pmod{m}. \end{aligned}$$

IV. Nous avons établi différents critères pour reconnaître si le groupe (S, T) est régulier, lorsque T jouit par rapport à S de la propriété  $p_r$  et  $r > 1$ .

3. — Sophie PICCARD (Neuchâtel). *Systèmes connexes de substitutions et bases d'un groupe de substitutions*. — Soient  $n$  un entier  $> 1$ ,  $k$  un entier  $\geq 1$  et soient  $S_1, S_2, \dots, S_k$   $k$  substitutions de degré  $n$  dont les éléments sont les nombres  $1, 2, \dots, n$ . Désignons par E l'ensemble de ces éléments. Nous disons que les substitutions  $S_1, S_2, \dots, S_k$  constituent un système connexe s'il n'existe aucun sous-ensemble propre E de E composé de l'ensemble des éléments d'un certain nombre  $\geq 1$  de cycles de chacune des substitutions considérées.

Soit G un groupe transitif de substitutions de degré  $n$ . Nous disons que G est d'ordre de connexion égal à  $k$  si G contient au moins un système connexe de  $k$  substitutions, alors qu'aucun système comprenant moins de  $k$  substitutions de G n'est connexe. Ainsi, le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  de degré  $n > 2$  a un ordre de connexion  $k = 1$  et le groupe alterné  $\mathfrak{A}_n$  de degré  $n > 3$  a un ordre de connexion égal à 1 (2) si  $n$  est impair (pair). Quel que soit l'entier  $k > 1$ , il existe un groupe transitif  $G_k$  dont l'ordre de connexion est égal à  $k$ . Tout système connexe de substitutions engendre un groupe transitif. Réciproquement, tout groupe transitif de substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$  contient des systèmes connexes de substitutions. En particulier l'ensemble de toutes les substitutions d'un groupe transitif qui ne laissent fixe aucun des éléments  $1, 2, \dots, n$  constitue un système connexe. D'autre part, l'ensemble de toutes les substitutions d'un groupe transitif constitue un système connexe.

Soit G un groupe de substitutions de degré  $n$  et soit  $l$  le plus petit entier positif, tel qu'il existe au moins un système de  $l$  substitutions génératrices du groupe G. Nous appelons base du groupe G un tel système de  $l$  éléments générateurs de G et nous disons que G est à base d'ordre  $l$ . Quel que soit l'entier  $n > 2$  ( $> 3$ ), le groupe symé-

<sup>1</sup> L'indice  $k + 1$  doit être remplacé par 1.

trique  $\mathfrak{S}_n$  (alterné  $\mathfrak{A}_n$ ) est, comme on sait, à base du second ordre. L'ordre de la base est un invariant d'un groupe.

Soit  $G$  un groupe régulier de degré  $n$  qui est à base d'ordre  $l$  et soient  $S_1, S_2, \dots, S_l$   $l$  substitutions de  $G$ . La condition nécessaire et suffisante pour que ces substitutions constituent une base du groupe  $G$  c'est qu'elles constituent un système connexe.

L'ordre de connexion d'un groupe transitif de substitutions est en général différent de l'ordre de sa base (voir le cas du groupe symétrique), mais ces deux ordres sont égaux pour un groupe régulier.

D'après le théorème de Jordan, à tout groupe  $G$  de substitutions correspond un groupe régulier  $G'$  de substitutions, simplement isomorphe à  $G$  et à toute base de  $G$  correspond une base de  $G'$ . Supposons que  $G$  est à base d'ordre  $l$  et soient  $S_1, S_2, \dots, S_l$   $l$  substitutions de  $G$ . Pour reconnaître si ces substitutions constituent ou non une base du groupe  $G$  il suffit de voir si les substitutions correspondantes du groupe  $G'$  constituent ou non un système connexe.

4. — S. BAYS (Fribourg). *Sur la primitivité des groupes de substitutions.* — On sait dans quelles conditions l'on dit qu'un groupe transitif est *imprimitif* ou *primitif* pour les éléments. La même question posée pour les couples a un sens, mais du fait que le couple n'est pas unique comme l'élément vis-à-vis des substitutions, il en résulte l'existence d'imprimitivités nécessaires pour les couples, que nous écrirons dans un exemple, celui du groupe alterné de degré 4:

(01, 10); (02, 20); (03, 30); (12, 21); (13, 31); (23, 32), ou ...;  $ab, ba$ ); ...

et

(01, 02, 03); (10, 12, 13); (20, 21, 23); (30, 31, 32); ou ...;  $(ax)$ ; ...  
 (10, 20, 30); (01, 21, 31); (12, 13, 23); (03, 13, 23); ou ...;  $(xa)$ ; ...

et que nous notons à droite d'une manière générale, en n'écrivant (et sous forme abrégée pour les deux secondes) que le système général de la répartition. Nous appelons *inverses* les deux couples  $ab$  et  $ba$  et *conjuguées* les deux répartitions imprimitives que l'on obtient l'une de l'autre en remplaçant chaque couple par son inverse.

Une répartition en systèmes imprimitifs de couples autre que les trois ci-dessus exclut, dans un cas la transitivité quadruple, dans un autre cas la transitivité triple, donc dans les deux cas la transitivité quadruple. Donc dès que le groupe a cette dernière transitivité, il ne peut avoir relativement aux couples que les imprimitivités nécessaires ci-dessus; on peut l'appeler *primitif* par rapport aux couples.

Par contre, dans les transitivités inférieures, on peut avoir par rapport aux couples des imprimitivités non nécessaires. Pour le

même groupe alterné de degré 4, deux fois transitif, ces imprimitivités sont les suivantes:

$$(01, 23); (02, 31); (03, 12); (10, 32); (20, 13); (30, 21) \quad (1)$$

$$(01, 12, 20); (13, 32, 21); (30, 02, 23); (31, 10, 03) \quad (2)$$

et la conjuguée de (2) qui est différente; en plus une troisième répartition, identique encore à sa conjuguée, obtenue de (1) en remplaçant le premier *ou* le second couple de chaque système par son inverse. Ce groupe, qui est primitif pour les éléments, est donc *imprimitif* pour les couples.

Nous donnerons ailleurs le résultat plus complet de notre étude; nous dirons simplement ici que pour les quatre groupes généraux de degré  $n$ , étudiés à titre d'exemple, cyclique, métacyclique, alterné et symétrique, la question de leur primitivité ou imprimitivité par rapport aux couples est fixée. Par rapport aux triples il y a *neuf* répartitions en systèmes imprimitifs de triples *nécessaires* pour le groupe triplement transitif; pourtant il y a aussi des groupes imprimitifs (et évidemment des groupes primitifs) par rapport aux triples.

5. H. BIERI (Herzogenbuchsee). *Anwendung eines Abbildungssatzes auf das Randwertproblem der Variationsrechnung, demonstriert an drei Beispielen vom Typus  $\int F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) dt = \text{Minimum}$* . — Ein Satz über die umkehrbar-eindeutige Abbildung zweier einfach-zusammenhängender Gebiete aufeinander ist von Herrn Prof. W. SCHERRER so formuliert worden, dass er mit Erfolg zur Lösung des Randwertproblems der Variationsrechnung herangezogen werden kann <sup>1</sup>. Das genannte Problem besteht in einem speziellen Falle darin, durch zwei Punkte  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  einen Extremalenbogen zu legen, der ein relatives starkes Minimum von  $\int F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) dt$  liefert.

Die ausgezeichnetere Extremalenschar durch  $P(x_1^0, x_2^0)$  schreiben wir in der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t, \kappa, x_1^0, x_2^0) ; & x_1^0 &= x_1(t_0 \dots) ; \\ x_2 &= x_2(t, \kappa, x_1^0, x_2^0) ; & x_2^0 &= x_2(t_0 \dots) ; \end{aligned} \quad \text{mit} \quad t_0 = 0 \quad (1)$$

Die Enveloppenbedingung lautet:

$$\frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (t, \kappa)} = \Delta(t, \kappa) = 0 \quad (2)$$

$t$ -Werte, die (2) erfüllen, werden mit  $\tau$  bezeichnet. In einer  $(t, \kappa)$ -Ebene wird der Rand  $C$  von  $G$  definiert durch  $\Delta(\tau, \kappa) = 0$ . Für

<sup>1</sup> H. BIERI, *Beispiele zum Randwertproblem der Variationsrechnung*, Diss. 1941.

innere Punkte von  $G$  gibt dann:  $0 \leq t < \tau$ . In einer  $(x_1, x_2)$ -Ebene wird das Bild des Randes  $C$  dargestellt durch (1) unter Berücksichtigung von (2). Es ist die Enveloppe von (1). (1) liefert ferner mit der Einschränkung  $0 \leq t < \tau$  die in Frage stehende Abbildung.  $\Delta(t, \kappa)$  verschwindet bei unserer Koordinatenwahl für  $t = 0$ ; diese höchst unerwünschte Singularität kann durch Einführung « kartesischer » Parameter  $\bar{\xi} = \sin \kappa \cdot t$ ,  $\bar{\eta} = -\cos \kappa \cdot t$  beseitigt werden. Sind nun alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt, so bedeuten die Bilder der Geradenstücke  $\kappa = \text{konst.}$ ,  $0 \leq t < \tau$  Extremalenbögen, welche die Jakobische Bedingung erfüllen und ausser  $\bar{P}(x_1^0, x_2^0)$  keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Ein gewisses Gebiet  $\bar{G}$  der  $(x_1, x_2)$ -Ebene wird also von ihnen einfach und lückenlos überdeckt. Ist jetzt  $\bar{Q}$  ein innerer Punkt von  $\bar{G}$  und sind ausserdem noch die Legendresche- und die Weierstrassche Bedingung erfüllt, so existiert die Lösung des Randwertproblems und ist eindeutig.

Die Beispiele mit  $F = \mathfrak{A}x + \sqrt{x_1^2 \cdot \dot{x}^2}$ ;  $F = \mathfrak{A}x + \sqrt{(x_1^2 - 1) \cdot \dot{x}^2}$ ;  $F = \mathfrak{A}x + \sqrt{(x_1^2 + 1) \cdot \dot{x}^2}$ ;  $\text{rot } \mathfrak{A} = (0, 0, 1)$  lassen sich vollständig durchrechnen.  $\Delta(\tau, \kappa) = 0$  hat die Form einer kubischen Gleichung in  $\tau$ . Diese wird sehr vereinfacht durch den Ansatz

$$\tau = -\frac{k(\kappa)}{\cos \kappa} \quad (3)$$

In allen drei Fällen lassen sich die Enveloppen, allerdings erst nach Einführung geeigneter Hilfsgrössen  $m_i$ , soweit als gerade nötig diskutieren.

*Resultate:* Die ersten zwei Beispiele <sup>1</sup> sind im wesentlichen äquivalent mit dem klassischen Problem der Rotationsfläche kleinster Oberfläche. Das dritte ist komplizierter. Man schneide von der  $(x_1, x_2)$ -Ebene zwei einfachzusammenhängende Gebiete von der Form einer Spitze weg. Im abgeschlossenen Restgebiet besitzt dann das Randwertproblem immer genau eine Lösung.

Für das erste Beispiel gibt es noch eine individuelle Lösungsmethode: Der Ansatz  $\tau = k(\kappa) \cdot T$ , wo  $T$  den  $t$ -Wert im Scheitel in Bezug auf die  $x_2$ -Achse bedeutet, gestattet den Nachweis, dass die Enveloppe nicht nur einfach, sondern durchwegs nach der gleichen Seite gekrümmt ist.

6. — J. BUCHER (Luzern). *Die Lösung einer von Gauss gestellten Aufgabe und die elementare Berechnung der Klassenzahl nach dem*

<sup>1</sup> Die ersten zwei Beispiele gestatten eine direkte Enveloppendiskussion, ebenso das dritte für den Spezialfall  $x_1^0 = 0$ ; für  $x_1^0 \neq 0$  wird mit Erfolg der Abbildungssatz verwendet.

*Modul 4 für gewisse Zahlkörper von ungerader Klassenzahl.* — Ist  $p$  eine Primzahl der Form  $4n + 1 = a^2 + b^2$ ,  $a$  ungerade. Bezeichnen wir das Produkt:  $(n + 1) \dots 2n$  mit  $r$  und mit  $\lambda$  eine der Zahlen  $+ 1$  oder  $- 1$ , dann besteht nach Gauss die Kongruenz:

$$\frac{r^2}{2} \equiv \lambda b \pmod{p}, \quad b \text{ positiv.}$$

$\lambda$  wurde von GAUSS, DIRICHLET, DEDEKIND für den Fall einer Primzahl der Form  $8n + 5$  bestimmt, im allgemeinen Fall einer Primzahl der Form  $4n + 1$  scheint  $\lambda$  bisher nicht bestimmt worden zu sein. Es wird gezeigt, dass allgemein  $\lambda = \left(\frac{-1}{ag}\right)$  ist, wo  $g$  die Anzahl der reduzierten Zahlen in  $k(\sqrt{p})$  ist. Aus  $\lambda$  und der Gliederzahl  $m$  der Periode des Kettenbruches für die reduzierte ganze Zahl  $\frac{c + \sqrt{p}}{2}$  ( $c$  grösste ungerade Zahl  $< \sqrt{p}$ ) lässt sich die Klassenzahl  $h$  für den Körper  $k(\sqrt{p})$  nach dem Modul 4 bestimmen. Es ist  $h \equiv \lambda \left(\frac{-1}{ma}\right) \pmod{4}$ .

Für den speziellen Dirichlet'schen Körper  $k(\sqrt{p}, \sqrt{-p})$ , wo  $p$  eine Primzahl der Form  $8n + 5$  ist, ergibt sich einfacher für die Klassenzahl  $H$ :  $H \equiv \left(\frac{-1}{m}\right) \left(\frac{1}{a-b}\right) \pmod{4}$  ( $a$  und  $b$  positiv).

7. — P. NOLFI (Zürich). — *Die Sterblichkeit im Februar und März 1944 in mathematischer Beleuchtung.* — Die im Februar und März 1944 in der Schweiz beobachtete Übersterblichkeit gab Anlass zur Prüfung der Frage, inwieweit angenommen werden muss, dass dieses etwas sonderbare Ereignis rein zufällig oder durch kausale Ursachen hervorgerufen worden ist. Die Beantwortung dieser Frage auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet insofern Schwierigkeiten, als die Sterbenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Personen einer Bevölkerung grosse Unterschiede aufweisen, so dass es nicht zulässig wäre, nach dem üblichen Verfahren mit einer durchschnittlichen Wahrscheinlichkeit zu rechnen.

Wenn man jedoch von der Vorstellung ausgeht, dass jeder der beobachteten Personen eine Urne zugeordnet ist, enthaltend schwarze und weisse Lose und dass der Tod ständig aus diesen Urnen Lose zieht, wobei das Erscheinen eines schwarzen Loses das Ableben, das Erscheinen eines weissen Loses das Weiterleben der Person, aus dessen Urne das Los gezogen wurde, bedeutet, so gelingt es, eine Wahrscheinlichkeitsbestimmung durchzuführen, die den ins Gewicht fallenden Besonderheiten Rechnung trägt. Die mathematische Formulierung gestaltet sich überraschend einfach. Die Wahrscheinlichkeit  $\omega(r)$

dafür, dass in einer Personengruppe.  $r$  Todesfälle eintreten, lässt sich auf die einfache Formel

$$w(r) = \frac{u^r}{r!} e^{-u}$$

zurückführen, wobei  $u$  die erwartete Zahl der Todesfälle bedeutet. Mit Hilfe der Brunschen Reihe gelingt es, auf Grund dieser Formel die numerischen Werte für die Wahrscheinlichkeit bestimmter Abweichungen zu berechnen. Auf Grund der vom statistischen Amt der Stadt Zürich mitgeteilten Zahlen ergab sich, dass praktisch mit Sicherheit angenommen werden kann, dass die in den Monaten Februar und März beobachtete Übersterblichkeit durch besondere Ursachen hervorgerufen worden ist.

8. — Georges VINCENT (Lausanne). *Sur les groupes de rotations sans point fixe.* (Présenté par M. G. DE RHAM.) — Toute substitution linéaire, homogène, orthogonale, à coefficients réels, suivant les  $n + 1$  variables  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , transforme en elle-même la sphère  $S^n$  définie par  $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$  dans l'espace euclidien réel  $E^{n+1}$ . Une telle substitution est dite *sans point fixe* si elle n'admet pas la valeur propre  $+1$ . La rotation correspondante ne laisse alors sur  $S^n$  aucun point invariant. On se propose de déterminer les groupes finis formés, à part l'identité, uniquement de substitutions de cette nature.

Le problème ne présente quelque intérêt que pour les sphères de dimension impaire (pour les dimensions paires, les groupes cherchés se réduisent à l'identité et au groupe cyclique d'ordre deux formé de l'identité et de la symétrie relativement à l'origine des coordonnées). Pour la dimension trois, le problème a été entièrement résolu par M. H. HOPF. Voici comment on peut l'aborder pour des dimensions supérieures.

Les sous-groupes abéliens du groupe  $G$  cherché devant être cycliques, celui-ci ne peut être, d'après un théorème de Burnside, que de l'un des deux types suivants:

*Type A*: Tous les sous-groupes de Sylow de  $G$  sont cycliques (à ce type appartiennent les groupes cycliques eux-mêmes).

*Type B*: Les sous-groupes de Sylow de  $G$  relatifs à un diviseur premier  $p \neq 2$  sont cycliques, ceux relatifs au diviseur premier 2 sont du type des quarternions généralisé (ordre  $2^m$ ;  $A^{2^{m-1}} = E$ ,  $B^2 = A^{2^{m-2}}$ ,  $BAB^{-1} = A^{-1}$ ,  $m > 2$ ).

L'étude des représentations linéaires irréductibles des groupes du type A conduit au résultat suivant:

*Toute sphère de dimension impaire (supérieure à un) admet une infinité de groupes non abéliens de rotations sans point fixe.*

Le problème est entièrement résolu pour les sphères de dimension  $4m + 1$  par le théorème:

*Les groupes de rotations sans point fixe d'une sphère de dimension  $4m + 1$  sont tous du type A.*

9. — H. HADWIGER (Bern). *Ein Umordnungssatz der Funktionentheorie.* — Nach dem bekannten RIEMANNschen Umordnungssatz<sup>1</sup> lässt sich jede bedingt (nicht absolut) konvergente Reihe reeller Zahlen zu jeder beliebigen reellen Zahl als Summe umordnen. Nach den Ergebnissen von STEINITZ<sup>2</sup> gibt es Vektorreihen, die sich zu jedem beliebigen Summenvektor des endlich dimensionalen Vektorraumes umordnen lassen. Zu einem analogen Resultat gelangt man auch in bezug auf Reihen des unendlich dimensionalen Folgenraumes. Es muss hier darauf hingewiesen werden, dass WALD den STEINITZschen Satz auf den Folgenraum übertragen konnte<sup>3</sup>. Dass es auch bedingt konvergente Reihen des Hilbertschen Raumes gibt, die sich zu jeder Summe des Raumes umordnen lassen hat der Referent in Rahmen einer allgemeineren Untersuchung gezeigt<sup>4</sup>, durch welche dargetan wurde, dass sich der STEINITZsche Satz (in einer äquivalenten Formulierung) nicht auf den Hilbertschen Raum übertragen lässt. Ferner hat der Referent in einer kleinen Note<sup>5</sup> ein Beispiel einer Reihe reeller Funktionen gegeben, welche die Eigenschaft hat, dass man sie zu jeder beliebig gewählten stetigen Funktion als Summe umordnen kann. Eine Erweiterung auf komplexe Veränderliche, d. h. die Formulierung eines entsprechenden Satzes der Funktionentheorie, war naheliegend. Nun hat in der Tat S. RIOS<sup>6</sup> den in Frage stehenden Satz formuliert und bewiesen. Bei der Konstruktion des Beispiels hat er im wesentlichen das nämliche Prinzip befolgt, das auch dem Referenten bei der Behandlung des reellen Falles gedient hat (dies wird in einer Fussnote von RIOS erwähnt). Mit einigen unwesentlichen Modifikationen lautet dieser Satz wie folgt:

Es gibt eine Reihe analytischer Funktionen die in der ganzen Ebene lokal gleichmässig zur Summe Null konvergiert und welche folgende Eigenschaft hat: Zu jeder analytischen Funktion und einem schlichten beschränkten Regularitätsgebiet derselben lässt

<sup>1</sup> Vgl. K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin, 1931, 3. Aufl., S. 328.

<sup>2</sup> E. STEINITZ, Bedingt. konvergente Reihen und konvexe Systeme. *Journ. reine u. angew. Math.*, 143 (1913), S. 128-175.

<sup>3</sup> A. WALD, Reihen in topologischen Gruppen. *Ergebnisse eines math. Koll. Wien.*, 59. und 60. Koll. (1933).

<sup>4</sup> H. HADWIGER, Ueber das Umordnungsproblem im Hilbertschen Raum. *Math. Zeitschr.*, 46 (1940), S. 79.

<sup>5</sup> H. HADWIGER, Eine Bemerkung über Umordnung von Reihen reeller Funktionen. *The Tôhoku Math. Journ.*, 46 (1939), S. 22-25.

<sup>6</sup> S. RIOS, Sobre la reordenación de series funcionales y sus aplicaciones. *Abhandli Math. Seminar der Hansischen Univ.*, 15 (1943), S. 72-75.

sich eine Umordnung der gegebenen Reihe finden, welche in dem gewählten Gebiet lokal gleichmässig gegen die gewählte analytische Funktion konvergiert.

10. — R. WAVRE. *Sur quelques hermitiens particuliers*. — L'auteur applique à quelques opérateurs hermitiens spécialement simples les propriétés concernant les conséquents par l'opérateur d'un élément particulier. Ces propriétés ont été démontrées dans deux articles des *Commentarii* (vol. 15, fasc. 4 et vol. 16, fasc. 1).

Les opérateurs envisagés dans cette communication étaient:

La détermination des axes d'une quadrique (matrice symétrique).

La multiplication d'une fonction par une autre (domaine réel)

La dérivation (multipliée par  $\sqrt{-1}$ ).

Les projecteurs, les intégrales de Fourier, l'intégrale de Poisson.

La semi-continuité de la plus haute fréquence considérée comme fonctionnelle de l'élément initial fut aussi rappelée.

---

*Séance de printemps, Berne, 6 mai 1945*

Conférence de M. le professeur Lars AHLFORS (Zurich): «Extremalaufgaben und konforme Abbildung».

---

*Réunion de Fribourg, 2 septembre 1945*

(34<sup>e</sup> assemblée annuelle)

M. DIETHELM (Schwyz): Über Anwendungen der Identitätsfunktion in der Mathematik.

P. BIDAL (Aigle): A propos du théorème d'existence des formes différentielles harmoniques.

Sophie PICCARD (Neuchâtel): Des couples de substitutions qui engendrent un groupe régulier.

Ed. ARNOUS (Paris et Leysin): Sur les statistiques attachées aux opérateurs hermitiens et leurs transformées de Fourier Stieltjes.

B. ECKMANN (Lausanne): Der Homologiering einer beliebigen Gruppe.

R. WAVRE (Genève): Curiosité géométrique.

M. PLANCHEREL (Zurich): Sur la convergence en moyenne d'une suite de solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire de type elliptique.

- F. FIALA (Neuchâtel): Sur les réseaux riemanniens.
- P. BERNAYS (Zürich): Bemerkungen zum Satz über symmetrische Funktionen.
- H. HADWIGER (Bern): Mittelbarkeit und Integration in Gruppen.
- Ch. BLANC (Lausanne): Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.
- M. GUT (Zürich): Zur Theorie der Normenreste einer relativ zyklischen Erweiterung von ungeradem Primzahlgrade.
- L. LOCHER (Winterthur): Bericht über die neue Zeitschrift « Die Elemente der Mathematik ».
- R. WAVRE et R. SOUDAN (Genève): Sur les fonctions polyharmoniques.
- J. O. FLECKENSTEIN (Basel): Die genaue Datierung der erstmaligen analytischen Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen durch Johann I. Bernoulli.

*Séance administrative.* — Le Comité pour 1946 et 1947 a été constitué comme suit: Max GUT, président; H. HADWIGER, vice-président; Ch. BLANC, secrétaire-trésorier.

---

*Séance de printemps, Bienne, 26 mai 1946.*

Conférence de M. le professeur Jean LERAY (Paris): La Topologie algébrique.

---

*Réunion de Zurich, 8 septembre 1946.*

(35<sup>e</sup> assemblée annuelle.)

- J.-P. SYDLER (Zurich): Hyperquadratiques de révolution et droites associées.
- E. SPECKER (Zürich): Über den Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppen und zweiten Homotopiegruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten.
- H. BIERI (Bern): Eine neue Methode zur Lösung von Randwertproblemen der Variationsrechnung.
- P. BIDAL (Lausanne): Déterminants dont les éléments sont des formes à multiplication extérieure.
- G. VINCENT (Lausanne): Sur les groupes de rotations sans points fixes de la sphère à  $n$  dimensions.
- B. ECKMANN (Lausanne): Polyeder und Operatoren.

- Sophie PICCARD (Neuchâtel): I. Les systèmes de substitutions qui engendrent un groupe régulier. — II. Quelques propositions concernant les groupes d'ordre fini.
- J. de SIEBENTHAL (Zurich-Lausanne): Sur la théorie globale des groupes de Lie compacts.
- J. O. FLECKENSTEIN (Basel): Ein Problem der sphärischen Astronomie aus dem Nachlass von Joh. I. Bernoulli.
- M. DIETHELM (Schwyz): Originelle Differentialquotient-Ableitungen.
- M. GUT (Zürich): Über die Klassenanzahlen der reellen Unterkörper des Körpers der  $l$ -ten Einheitswurzeln.

---

*Séance de printemps, Berthoud, 18 mai 1947.*

Conférence de M. le professeur O. ORE (New Haven, Conn.):  
Entwicklungen aus dem Jordan-Hölderschen Satz.

---

*Réunion de Genève, 31 août 1947.*

(37<sup>e</sup> assemblée annuelle.)

- Th. REICH (Glarus): Das Verhalten der regulären Quaternionenfunktionen in der Nähe isolierter unwesentlich singulärer Punkte, Kurven und Flächen.
- A. KRISZTEN (Zürich): Areolar monogene Funktionen.
- G. DE RHAM (Lausanne): Sur la théorie des distributions de M. Laurent Schwartz.
- L. KOLLROS (Zurich): Solution d'un problème de Steiner.
- H. HADWIGER (Bern): Eine elementare Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung im Raum.
- Sophie PICCARD (Neuchâtel): I. Un théorème concernant le nombre total des bases d'un groupe d'ordre fini. — II. Sur les bases du groupe symétrique.
- A. AMMANN (Genève): Sur la répartition des nombres modulo un.
- A. CHALLAND (Berne): Qu'est-ce qu'un grand nombre ? La notation de grand nombre dans le calcul des probabilités.
- M. DIETHELM (Schwyz): Über Anwendungen des Lehrsatzes von Ptolemäus.

*Séance administrative.* — Comité pour les années 1948 et 1949:

H. HADWIGER, président; Ch. BLANC, vice-président; A. PELUGER, secrétaire-trésorier.

---

*Séance de printemps, Soleure, 9 mai 1948.*

Conférence de M. le Prof. André WEIL (Chicago): L'hypothèse de Rieman dans les corps de fonctions.

*Séance administrative.* — A la suite de la démission de M. Hadwiger le Comité a été constitué comme suit: Ch. BLANC, président; A. PFLUGER, vice-président; F. FIALA, secrétaire-trésorier.

---

*Réunion de Saint-Gall, 5 septembre 1948.*

(37<sup>e</sup> assemblée annuelle.)

- H. P. KUNZI (Olten): Der Fatou'sche Satz bei harmonischen und subharmonischen Funktionen in Räumen von der Dimension  $> 2$ .
- A. PFLUGER (Zürich): Quasikonforme Abbildung und Kapazität.
- W. BAUM (Zürich): Nullwege im Komplexen.
- E. SPECKER (Zürich): Nicht konstruktiv beweisbare Sätze der Analysis.
- Sophie PICCARD (Neuchâtel): 1. Les bases du groupe  $\gamma_7$ . — 2. Sur les bases du groupe alterné. — 3. Quelques propositions de la théorie des substitutions.
- H. HADWIGER (Bern): Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionale.
- M. RUEFF (Zürich): Allgemeine Sätze über Reduktionen quadratischer Formen von 4 Variablen.
- W. SCHERRER (Bern): Zur Theorie der Materie.
- M. JEGER (Olten-Zürich): Affine Zusammenhänge und Gewebe.
- H. E. RAUCH (Princeton-Zürich): Einige Sätze über Funktionen mehrerer Veränderlichen.

---

*Séance de printemps, Berne, 22 mai 1949.*

Conférence de M. le professeur G. POLYA (Stanford University): Die Steinersche Symmetrisierung in der mathematischen Physik.

---

*Réunion de Lausanne, 4 septembre 1949.*

(38<sup>e</sup> assemblée annuelle.)

- F. FIALA (Neuchâtel): Quelques généralisations de la symétrisation de Steiner.
- H. GUGGENHEIMER (Basel): Über die Bettischen Zahlen Riemannscher Manigfaltigkeiten.
- B. ECKMANN (Zürich): Analytische und harmonische Differentiale in komplexen Manigfaltigkeiten.
- Sophie PICCARD (Neuchâtel): 1. Les diverses groupes que peut engendrer un système connexe et primitif de cycles du 6<sup>e</sup> ordre et les bases de ce groupe. — 2. Les sous-groupes primitifs d'ordre 1344 du groupe alterné de degré 8.
- M. GUT (Zürich): Eulersche Zahlen und grosser Fermatscher Satz.
- Ch. BLANC (Lausanne): A propos de la théorie des plaques élastiques.
- H. BIERI (Bern): Die erste Variation der Masszahlen eines Elementarkegels.
- R. ZWAHLEN (Zürich): Eigenwertprobleme mit dreigliedrigen Rekursionsformeln zwischen den Eigenwerten.
- W. KAPLAN (Zürich-Ann Arbor). . . . ?

*Séance administrative.* — Comité pour les années 1950 et 1951: A. PFLUGER, président; F. FIALA, vice-président; J. J. BURCKHARDT, secrétaire-trésorier.

---

*Séance de printemps, Bienne, 14 mai 1950.*

Conférence de M. le professeur R. NEVANLINNA (Zürich-Helsingfors): Probleme der offenen Riemannschen Flächen.

---