

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1942-1950)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
  
**Kapitel:** Réunion de Sils, en Engadine, 3 septembre 1944.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

9. — A. HÄUSERMANN (Zürich). *Ueber die Berechnung singulärer Moduln bei Ludwig Schläfli.* — In diesem Referat wurde auf bisher völlig unbekannte allgemeine und numerische Resultate des Berner Mathematikers L. SCHLÄFLI (1814-1895) im Gebiet der singulären Moduln hingewiesen.

Auf Anregung von Herrn Prof. FUETER wurde der Nachlass Schläflis noch einmal gesichtet und alle Manuskripte sorgfältig zusammengestellt, die allgemeine Betrachtungen und numerische Berechnungen von singulären Moduln, von Modulgleichungen und von Modularfunktionen enthielten. Das erste Aussondern geschah mit dem neuen Sachkatalog von Herrn Prof. BURCKHARDT.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in der auf den Herbst erscheinenden Inaugural-Dissertation des Referenten ausführlich dargestellt <sup>1</sup>.

---

*Réunion de Sils, en Engadine, 3 septembre 1944.*

---

La Société mathématique suisse a tenu sa 33<sup>e</sup> assemblée annuelle le 3 septembre 1944, à Sils, en Engadine, sous la présidence de M. le professeur G. DE RHAM, en même temps que la 124<sup>e</sup> session annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative*, la Société a conféré le titre de membre honoraire à M. Gustave DUMAS, professeur honoraire à l'Université de Lausanne.

1. — Julien MALENGREAU (Bruxelles). *Sur quelques relations entre grandeurs de l'espace euclidien.* — L'auteur montre, par des exemples, que si en partant des postulats classiques de la géométrie élémentaire on arrive à démontrer la relation de Stewart, réciproquement en partant de cette dernière on arrive à démontrer les postulats classiques. Cette réversibilité de la géométrie est mise en évidence en utilisant la notion du  $n$ -point parfait, ensemble de  $n$  points tels que la distance entre deux d'entre eux est toujours la même. Une formule très simple relie cette distance commune aux distances entre un point quelconque de l'espace déterminé par le  $n$ -point parfait considéré et les points de ce dernier. De cette formule on peut déduire que l'espace

---

<sup>1</sup> Inaugural-Dissertation, Universität Zürich, Gebr. Leemann & Co., 1944.

déterminé par un  $n + 1$  — point parfait est plus vaste que celui déterminé par un  $n$ -point parfait. L'auteur déduit de ces considérations que l'on peut commencer la géométrie analytique, indépendamment de la géométrie élémentaire, en définissant l'espace euclidien déterminé par un  $n$ -point parfait comme le lieu de tous les points  $S$  tels que si  $A_m, A_n$  et  $A_p$  sont trois de ses points reliés entre eux par la relation  $\Sigma(\pm A_m A_n) = 0$  la valeur absolue de la somme des quotients  $(\pm A_m A_n) \times \frac{SA_p}{SA_m \times SA_n}$  est égale à la valeur absolue du produit de ces quotients.

L'étude analytique de ce lieu intégral peut se faire sans emploi de coordonnées, dont la notion sera introduite seulement à partir de l'étude des lieux qui ne comprennent qu'une partie des points de l'espace euclidien.

2. — Sophie PICCARD (Neuchâtel). — *Sur les couples de substitutions qui engendrent un groupe régulier.* — Soit  $m$  un entier  $\geq 2$ ,  $k$  un entier  $> 1$ ,  $S$  une substitution régulière d'ordre  $m$  et de degré  $km$ ,  $T$  une substitution régulière du même degré et portant sur les mêmes éléments que  $S$  et soit  $(S, T)$  le groupe engendré par les deux substitutions  $S$  et  $T$ . Nous dirons que  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p$  s'il existe un entier  $r$  ( $1 \leq r \leq m$ ), tel que  $T$  transforme les éléments de chaque cycle de  $S$  en éléments de  $r$  autres cycles de  $S$  et nous dirons dans ce cas que  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p_r$ .

Soit

$$S = (1, 2 \dots m)(m + 1, m + 2 \dots 2m) \dots (k - 1)m + 1(k - 1)m + 2 \dots km),$$

soit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & km \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{km} \end{pmatrix}$$

et soit  $t > 1$  l'ordre de  $T$ .

I. Les conditions suivantes sont nécessaires pour que le groupe  $(S, T)$  soit régulier:

1.  $T[S]$  ne transforme aucun élément d'un cycle de  $S[T]$  en un élément du même cycle.

2.  $T[S]$  transforme les éléments de chaque cycle de  $S[T]$  en éléments d'un nombre égal de cycles de  $S[T]$ , autrement dit chacune des substitutions  $S, T$  jouit par rapport à l'autre de la propriété  $p$ .

3. Si  $T$  jouit par rapport à  $S$  de la propriété  $p_r$  ( $1 \leq r \leq m$ ),  $m$  est un multiple de  $r$  et, si  $T$  transforme au moins un élément d'un cycle  $C$  de  $S$  en un élément d'un second cycle  $C'$  de  $S$ ,  $T$  transforme au total  $m/r$  éléments de  $C$  en éléments de  $C'$ . D'autre part, si  $r > 1$ ,  $T$  ne saurait transformer deux éléments consécutifs d'un cycle de  $S$  en deux

éléments d'un autre cycle de S, ni deux éléments quelconques d'un même cycle de S en deux éléments consécutifs d'un autre cycle de S. Quels que soient l'entier  $r$  ( $1 \leq r \leq m$ ) le cycle  $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$  de S et l'élément  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) de ce cycle, T transforme  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+r}^1$  en deux éléments d'un même cycle de S et  $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{i+r-1}^1$  en éléments de  $r$  cycles différents de S. Il existe un entier  $\mu$  ( $1 \leq \mu \leq m$ ), tel que  $TS^r T^{-1} = S^\mu$ . Cet entier  $\mu$  vérifie les congruences

$$\frac{m}{r} \mu \equiv 0 \pmod{m}$$

et

$$\frac{\mu^t}{r^{t-1}} \equiv r \pmod{m}$$

et on a

$$D(m, \mu) = r$$

et

$$a_{i+jr} \equiv a_i + j\mu \pmod{m^2}, \quad i = 1, 2, \dots, km, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{m}{r} - 1.$$

Si un cycle de T contient des éléments de  $l$  ( $1 \leq l \leq t$ ) cycles de S et de  $l$  seulement, tout cycle de T jouit de la même propriété.

Si  $r > 1$ , quels que soient les cycles  $(b_1 b_2 \dots b_l)$  et  $(c_1 c_2 \dots c_t)$  de T comprenant deux éléments  $b_u$  ( $1 \leq u \leq t$ ) et  $c_v$  ( $1 \leq v \leq t$ ) d'un même cycle de S, si  $c_v \equiv b_u \pmod{r}$ , quel que soit  $j = 1, 2, \dots, t - 1$ , les nombres  $b_{u+j}$  et  $c_{v+j}$  font partie d'un même cycle de S et sont congruents mod.  $r$ . Si T jouit par rapport à S de la propriété  $p_m$ , aucun cycle de T ne saurait contenir plus d'un élément d'un même cycle de S.

II. Quel que soit l'entier  $r \geq 1$ , il existe des couples de substitutions régulières S, T, tels que T jouit par rapport à S de la propriété  $p_r$  et que le groupe (S, T) est régulier.

III. Si T jouit par rapport à S de la propriété  $p_1$ , la condition nécessaire et suffisante pour que le groupe (S, T) soit régulier c'est que: 1°

$$a_{(i-1)m+j} \equiv a_{(i-1)m+1} + (j-1)\mu \pmod{m^3}, \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

$$j = 2, 3, \dots, m,$$

$\mu$  désignant un entier premier avec  $m$ , tel que  $1 \leq \mu < m$  et que  $\mu^k \equiv 1 \pmod{m}$ , les nombres  $a_{(i-1)m+j}$  faisant tous partie d'un même cycle de S.

<sup>1</sup> Les indices supérieurs à  $m$  doivent être réduits mod.  $m$ .

<sup>2</sup> Les nombres  $a_{(i-1)m+j}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) font tous partie d'un même cycle de S.

<sup>3</sup> L'indice  $k + 1$  doit être remplacé par 1.

2° Il existe une permutation  $i_2, i_3, \dots, i_k$  des nombres  $2, 3, \dots, k$  et  $k$  nombres  $j_1, j_2, \dots, j_k$  de la suite  $1, 2, \dots, m$ , tels que, en posant  $i_1 = 1$ , on ait

$$a_{(i_l-1)m+1} = (i_{l+1} - 1)m + j_{l+1}, \quad l = 1, 2, \dots, k^1,$$

et que

$$\begin{aligned} j_k + \mu j_{k-1} + \mu^2 j_{k-2} + \dots + \mu^{k-1} j_1 &\equiv j_{k-1} + \mu j_{k-2} + \mu^2 j_{k-3} + \dots \\ &+ \mu^{k-1} j_k \equiv \dots \equiv j_1 + \mu j_k + \mu^2 j_{k-1} + \dots + \mu^{k-1} j_2 \pmod{m}. \end{aligned}$$

IV. Nous avons établi différents critères pour reconnaître si le groupe (S, T) est régulier, lorsque T jouit par rapport à S de la propriété  $p_r$  et  $r > 1$ .

3. — Sophie PICCARD (Neuchâtel). *Systèmes connexes de substitutions et bases d'un groupe de substitutions*. — Soient  $n$  un entier  $> 1$ ,  $k$  un entier  $\geq 1$  et soient  $S_1, S_2, \dots, S_k$   $k$  substitutions de degré  $n$  dont les éléments sont les nombres  $1, 2, \dots, n$ . Désignons par E l'ensemble de ces éléments. Nous disons que les substitutions  $S_1, S_2, \dots, S_k$  constituent un système connexe s'il n'existe aucun sous-ensemble propre E de E composé de l'ensemble des éléments d'un certain nombre  $\geq 1$  de cycles de chacune des substitutions considérées.

Soit G un groupe transitif de substitutions de degré  $n$ . Nous disons que G est d'ordre de connexion égal à  $k$  si G contient au moins un système connexe de  $k$  substitutions, alors qu'aucun système comprenant moins de  $k$  substitutions de G n'est connexe. Ainsi, le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  de degré  $n > 2$  a un ordre de connexion  $k = 1$  et le groupe alterné  $\mathfrak{A}_n$  de degré  $n > 3$  a un ordre de connexion égal à 1 (2) si  $n$  est impair (pair). Quel que soit l'entier  $k > 1$ , il existe un groupe transitif  $G_k$  dont l'ordre de connexion est égal à  $k$ . Tout système connexe de substitutions engendre un groupe transitif. Réciproquement, tout groupe transitif de substitutions des éléments  $1, 2, \dots, n$  contient des systèmes connexes de substitutions. En particulier l'ensemble de toutes les substitutions d'un groupe transitif qui ne laissent fixe aucun des éléments  $1, 2, \dots, n$  constitue un système connexe. D'autre part, l'ensemble de toutes les substitutions d'un groupe transitif constitue un système connexe.

Soit G un groupe de substitutions de degré  $n$  et soit  $l$  le plus petit entier positif, tel qu'il existe au moins un système de  $l$  substitutions génératrices du groupe G. Nous appelons base du groupe G un tel système de  $l$  éléments générateurs de G et nous disons que G est à base d'ordre  $l$ . Quel que soit l'entier  $n > 2$  ( $> 3$ ), le groupe symé-

<sup>1</sup> L'indice  $k + 1$  doit être remplacé par 1.

trique  $\mathfrak{S}_n$  (alterné  $\mathfrak{A}_n$ ) est, comme on sait, à base du second ordre. L'ordre de la base est un invariant d'un groupe.

Soit  $G$  un groupe régulier de degré  $n$  qui est à base d'ordre  $l$  et soient  $S_1, S_2, \dots, S_l$   $l$  substitutions de  $G$ . La condition nécessaire et suffisante pour que ces substitutions constituent une base du groupe  $G$  c'est qu'elles constituent un système connexe.

L'ordre de connexion d'un groupe transitif de substitutions est en général différent de l'ordre de sa base (voir le cas du groupe symétrique), mais ces deux ordres sont égaux pour un groupe régulier.

D'après le théorème de Jordan, à tout groupe  $G$  de substitutions correspond un groupe régulier  $G'$  de substitutions, simplement isomorphe à  $G$  et à toute base de  $G$  correspond une base de  $G'$ . Supposons que  $G$  est à base d'ordre  $l$  et soient  $S_1, S_2, \dots, S_l$   $l$  substitutions de  $G$ . Pour reconnaître si ces substitutions constituent ou non une base du groupe  $G$  il suffit de voir si les substitutions correspondantes du groupe  $G'$  constituent ou non un système connexe.

4. — S. BAYS (Fribourg). *Sur la primitivité des groupes de substitutions.* — On sait dans quelles conditions l'on dit qu'un groupe transitif est *imprimitif* ou *primitif* pour les éléments. La même question posée pour les couples a un sens, mais du fait que le couple n'est pas unique comme l'élément vis-à-vis des substitutions, il en résulte l'existence d'imprimitivités nécessaires pour les couples, que nous écrirons dans un exemple, celui du groupe alterné de degré 4:

(01, 10); (02, 20); (03, 30); (12, 21); (13, 31); (23, 32), ou ...;  $ab, ba$ ); ...

et

(01, 02, 03); (10, 12, 13); (20, 21, 23); (30, 31, 32); ou ...;  $(ax)$ ; ...  
(10, 20, 30); (01, 21, 31); (12, 13, 23); (03, 13, 23); ou ...;  $(xa)$ ; ...

et que nous notons à droite d'une manière générale, en n'écrivant (et sous forme abrégée pour les deux secondes) que le système général de la répartition. Nous appelons *inverses* les deux couples  $ab$  et  $ba$  et *conjuguées* les deux répartitions imprimitives que l'on obtient l'une de l'autre en remplaçant chaque couple par son inverse.

Une répartition en systèmes imprimitifs de couples autre que les trois ci-dessus exclut, dans un cas la transitivité quadruple, dans un autre cas la transitivité triple, donc dans les deux cas la transitivité quadruple. Donc dès que le groupe a cette dernière transitivité, il ne peut avoir relativement aux couples que les imprimitivités nécessaires ci-dessus; on peut l'appeler *primitif* par rapport aux couples.

Par contre, dans les transitivités inférieures, on peut avoir par rapport aux couples des imprimitivités *non* nécessaires. Pour le

même groupe alterné de degré 4, deux fois transitif, ces imprimitivités sont les suivantes:

$$(01, 23); (02, 31); (03, 12); (10, 32); (20, 13); (30, 21) \quad (1)$$

$$(01, 12, 20); (13, 32, 21); (30, 02, 23); (31, 10, 03) \quad (2)$$

et la conjuguée de (2) qui est différente; en plus une troisième répartition, identique encore à sa conjuguée, obtenue de (1) en remplaçant le premier *ou* le second couple de chaque système par son inverse. Ce groupe, qui est primitif pour les éléments, est donc *imprimitif* pour les couples.

Nous donnerons ailleurs le résultat plus complet de notre étude; nous dirons simplement ici que pour les quatre groupes généraux de degré  $n$ , étudiés à titre d'exemple, cyclique, métacyclique, alterné et symétrique, la question de leur primitivité ou imprimitivité par rapport aux couples est fixée. Par rapport aux triples il y a *neuf* répartitions en systèmes imprimitifs de triples *nécessaires* pour le groupe triplement transitif; pourtant il y a aussi des groupes imprimitifs (et évidemment des groupes primitifs) par rapport aux triples.

5. H. BIERI (Herzogenbuchsee). *Anwendung eines Abbildungssatzes auf das Randwertproblem der Variationsrechnung, demonstriert an drei Beispielen vom Typus  $\int F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) dt = \text{Minimum}$* . — Ein Satz über die umkehrbar-eindeutige Abbildung zweier einfach-zusammenhängender Gebiete aufeinander ist von Herrn Prof. W. SCHERRER so formuliert worden, dass er mit Erfolg zur Lösung des Randwertproblems der Variationsrechnung herangezogen werden kann <sup>1</sup>. Das genannte Problem besteht in einem speziellen Falle darin, durch zwei Punkte  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  einen Extremalenbogen zu legen, der ein relatives starkes Minimum von  $\int F(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) dt$  liefert.

Die ausgezeichnetere Extremalenschar durch  $P(x_1^0, x_2^0)$  schreiben wir in der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t, \kappa, x_1^0, x_2^0) ; & x_1^0 &= x_1(t_0 \dots) ; \\ x_2 &= x_2(t, \kappa, x_1^0, x_2^0) ; & x_2^0 &= x_2(t_0 \dots) ; \end{aligned} \quad \text{mit} \quad t_0 = 0 \quad (1)$$

Die Enveloppenbedingung lautet:

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t, \kappa)} = \Delta(t, \kappa) = 0 \quad (2)$$

$t$ -Werte, die (2) erfüllen, werden mit  $\tau$  bezeichnet. In einer  $(t, \kappa)$ -Ebene wird der Rand  $C$  von  $G$  definiert durch  $\Delta(\tau, \kappa) = 0$ . Für

<sup>1</sup> H. BIERI, *Beispiele zum Randwertproblem der Variationsrechnung*, Diss. 1941.

innere Punkte von  $G$  gibt dann:  $0 \leq t < \tau$ . In einer  $(x_1, x_2)$ -Ebene wird das Bild des Randes  $C$  dargestellt durch (1) unter Berücksichtigung von (2). Es ist die Enveloppe von (1). (1) liefert ferner mit der Einschränkung  $0 \leq t < \tau$  die in Frage stehende Abbildung.  $\Delta(t, \kappa)$  verschwindet bei unserer Koordinatenwahl für  $t = 0$ ; diese höchst unerwünschte Singularität kann durch Einführung « kartesischer » Parameter  $\bar{\xi} = \sin \kappa \cdot t$ ,  $\bar{\eta} = -\cos \kappa \cdot t$  beseitigt werden. Sind nun alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt, so bedeuten die Bilder der Geradenstücke  $\kappa = \text{konst.}$ ,  $0 \leq t < \tau$  Extremalenbögen, welche die Jakobische Bedingung erfüllen und ausser  $\bar{P}(x_1^0, x_2^0)$  keinen gemeinsamen Punkt besitzen. Ein gewisses Gebiet  $\bar{G}$  der  $(x_1, x_2)$ -Ebene wird also von ihnen einfach und lückenlos überdeckt. Ist jetzt  $\bar{Q}$  ein innerer Punkt von  $\bar{G}$  und sind ausserdem noch die Legendresche- und die Weierstrassche Bedingung erfüllt, so existiert die Lösung des Randwertproblems und ist eindeutig.

Die Beispiele mit  $F = \mathfrak{A}x + \sqrt{x_1^2 \cdot \dot{x}^2}$ ;  $F = \mathfrak{A}x + \sqrt{(x_1^2 - 1) \cdot \dot{x}^2}$ ;  $F = \mathfrak{A}x + \sqrt{(x_1^2 + 1) \cdot \dot{x}^2}$ ;  $\text{rot } \mathfrak{A} = (0, 0, 1)$  lassen sich vollständig durchrechnen.  $\Delta(\tau, \kappa) = 0$  hat die Form einer kubischen Gleichung in  $\tau$ . Diese wird sehr vereinfacht durch den Ansatz

$$\tau = -\frac{k(\kappa)}{\cos \kappa} \quad (3)$$

In allen drei Fällen lassen sich die Enveloppen, allerdings erst nach Einführung geeigneter Hilfsgrössen  $m_i$ , soweit als gerade nötig diskutieren.

*Resultate:* Die ersten zwei Beispiele<sup>1</sup> sind im wesentlichen äquivalent mit dem klassischen Problem der Rotationsfläche kleinster Oberfläche. Das dritte ist komplizierter. Man schneide von der  $(x_1, x_2)$ -Ebene zwei einfachzusammenhängende Gebiete von der Form einer Spitze weg. Im abgeschlossenen Restgebiet besitzt dann das Randwertproblem immer genau eine Lösung.

Für das erste Beispiel gibt es noch eine individuelle Lösungsmethode: Der Ansatz  $\tau = k(\kappa) \cdot T$ , wo  $T$  den  $t$ -Wert im Scheitel in Bezug auf die  $x_2$ -Achse bedeutet, gestattet den Nachweis, dass die Enveloppe nicht nur einfach, sondern durchwegs nach der gleichen Seite gekrümmt ist.

6. — J. BUCHER (Luzern). *Die Lösung einer von Gauss gestellten Aufgabe und die elementare Berechnung der Klassenzahl nach dem*

<sup>1</sup> Die ersten zwei Beispiele gestatten eine direkte Enveloppendiskussion, ebenso das dritte für den Spezialfall  $x_1^0 = 0$ ; für  $x_1^0 \neq 0$  wird mit Erfolg der Abbildungssatz verwendet.



*Modul 4 für gewisse Zahlkörper von ungerader Klassenzahl.* — Ist  $p$  eine Primzahl der Form  $4n + 1 = a^2 + b^2$ ,  $a$  ungerade. Bezeichnen wir das Produkt:  $(n + 1) \dots 2n$  mit  $r$  und mit  $\lambda$  eine der Zahlen  $+ 1$  oder  $- 1$ , dann besteht nach Gauss die Kongruenz:

$$\frac{r^2}{2} \equiv \lambda b \pmod{p}, \quad b \text{ positiv.}$$

$\lambda$  wurde von GAUSS, DIRICHLET, DEDEKIND für den Fall einer Primzahl der Form  $8n + 5$  bestimmt, im allgemeinen Fall einer Primzahl der Form  $4n + 1$  scheint  $\lambda$  bisher nicht bestimmt worden zu sein. Es wird gezeigt, dass allgemein  $\lambda = \left(\frac{-1}{ag}\right)$  ist, wo  $g$  die Anzahl der reduzierten Zahlen in  $k(\sqrt{p})$  ist. Aus  $\lambda$  und der Gliederzahl  $m$  der Periode des Kettenbruches für die reduzierte ganze Zahl  $\frac{c + \sqrt{p}}{2}$  ( $c$  grösste ungerade Zahl  $< \sqrt{p}$ ) lässt sich die Klassenzahl  $h$  für den Körper  $k(\sqrt{p})$  nach dem Modul 4 bestimmen. Es ist  $h \equiv \lambda \left(\frac{-1}{ma}\right) \pmod{4}$ .

Für den speziellen Dirichlet'schen Körper  $k(\sqrt{p}, \sqrt{-p})$ , wo  $p$  eine Primzahl der Form  $8n + 5$  ist, ergibt sich einfacher für die Klassenzahl  $H$ :  $H \equiv \left(\frac{-1}{m}\right) \left(\frac{1}{a-b}\right) \pmod{4}$  ( $a$  und  $b$  positiv).

7. — P. NOLFI (Zürich). — *Die Sterblichkeit im Februar und März 1944 in mathematischer Beleuchtung.* — Die im Februar und März 1944 in der Schweiz beobachtete Übersterblichkeit gab Anlass zur Prüfung der Frage, inwieweit angenommen werden muss, dass dieses etwas sonderbare Ereignis rein zufällig oder durch kausale Ursachen hervorgerufen worden ist. Die Beantwortung dieser Frage auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet insofern Schwierigkeiten, als die Sterbenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Personen einer Bevölkerung grosse Unterschiede aufweisen, so dass es nicht zulässig wäre, nach dem üblichen Verfahren mit einer durchschnittlichen Wahrscheinlichkeit zu rechnen.

Wenn man jedoch von der Vorstellung ausgeht, dass jeder der beobachteten Personen eine Urne zugeordnet ist, enthaltend schwarze und weisse Lose und dass der Tod ständig aus diesen Urnen Lose zieht, wobei das Erscheinen eines schwarzen Loses das Ableben, das Erscheinen eines weissen Loses das Weiterleben der Person, aus dessen Urne das Los gezogen wurde, bedeutet, so gelingt es, eine Wahrscheinlichkeitsbestimmung durchzuführen, die den ins Gewicht fallenden Besonderheiten Rechnung trägt. Die mathematische Formulierung gestaltet sich überraschend einfach. Die Wahrscheinlichkeit  $\omega(r)$

dafür, dass in einer Personengruppe.  $r$  Todesfälle eintreten, lässt sich auf die einfache Formel

$$w(r) = \frac{u^r}{r!} e^{-u}$$

zurückführen, wobei  $u$  die erwartete Zahl der Todesfälle bedeutet. Mit Hilfe der Brunschen Reihe gelingt es, auf Grund dieser Formel die numerischen Werte für die Wahrscheinlichkeit bestimmter Abweichungen zu berechnen. Auf Grund der vom statistischen Amt der Stadt Zürich mitgeteilten Zahlen ergab sich, dass praktisch mit Sicherheit angenommen werden kann, dass die in den Monaten Februar und März beobachtete Übersterblichkeit durch besondere Ursachen hervorgerufen worden ist.

8. — Georges VINCENT (Lausanne). *Sur les groupes de rotations sans point fixe.* (Présenté par M. G. DE RHAM.) — Toute substitution linéaire, homogène, orthogonale, à coefficients réels, suivant les  $n + 1$  variables  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , transforme en elle-même la sphère  $S^n$  définie par  $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$  dans l'espace euclidien réel  $E^{n+1}$ . Une telle substitution est dite *sans point fixe* si elle n'admet pas la valeur propre  $+1$ . La rotation correspondante ne laisse alors sur  $S^n$  aucun point invariant. On se propose de déterminer les groupes finis formés, à part l'identité, uniquement de substitutions de cette nature.

Le problème ne présente quelque intérêt que pour les sphères de dimension impaire (pour les dimensions paires, les groupes cherchés se réduisent à l'identité et au groupe cyclique d'ordre deux formé de l'identité et de la symétrie relativement à l'origine des coordonnées). Pour la dimension trois, le problème a été entièrement résolu par M. H. HOPF. Voici comment on peut l'aborder pour des dimensions supérieures.

Les sous-groupes abéliens du groupe  $G$  cherché devant être cycliques, celui-ci ne peut être, d'après un théorème de Burnside, que de l'un des deux types suivants:

*Type A*: Tous les sous-groupes de Sylow de  $G$  sont cycliques (à ce type appartiennent les groupes cycliques eux-mêmes).

*Type B*: Les sous-groupes de Sylow de  $G$  relatifs à un diviseur premier  $p \neq 2$  sont cycliques, ceux relatifs au diviseur premier 2 sont du type des quarternions généralisé (ordre  $2^m$ ;  $A^{2^{m-1}} = E$ ,  $B^2 = A^{2^{m-2}}$ ,  $BAB^{-1} = A^{-1}$ ,  $m > 2$ ).

L'étude des représentations linéaires irréductibles des groupes du type A conduit au résultat suivant:

*Toute sphère de dimension impaire (supérieure à un) admet une infinité de groupes non abéliens de rotations sans point fixe.*

Le problème est entièrement résolu pour les sphères de dimension  $4m + 1$  par le théorème:

*Les groupes de rotations sans point fixe d'une sphère de dimension  $4m + 1$  sont tous du type A.*

9. — H. HADWIGER (Bern). *Ein Umordnungssatz der Funktionentheorie.* — Nach dem bekannten RIEMANNschen Umordnungssatz<sup>1</sup> lässt sich jede bedingt (nicht absolut) konvergente Reihe reeller Zahlen zu jeder beliebigen reellen Zahl als Summe umordnen. Nach den Ergebnissen von STEINITZ<sup>2</sup> gibt es Vektorreihen, die sich zu jedem beliebigen Summenvektor des endlich dimensionalen Vektorraumes umordnen lassen. Zu einem analogen Resultat gelangt man auch in bezug auf Reihen des unendlich dimensionalen Folgenraumes. Es muss hier darauf hingewiesen werden, dass WALD den STEINITZschen Satz auf den Folgenraum übertragen konnte<sup>3</sup>. Dass es auch bedingt konvergente Reihen des Hilbertschen Raumes gibt, die sich zu jeder Summe des Raumes umordnen lassen hat der Referent in Rahmen einer allgemeineren Untersuchung gezeigt<sup>4</sup>, durch welche dargetan wurde, dass sich der STEINITZsche Satz (in einer äquivalenten Formulierung) nicht auf den Hilbertschen Raum übertragen lässt. Ferner hat der Referent in einer kleinen Note<sup>5</sup> ein Beispiel einer Reihe reeller Funktionen gegeben, welche die Eigenschaft hat, dass man sie zu jeder beliebig gewählten stetigen Funktion als Summe umordnen kann. Eine Erweiterung auf komplexe Veränderliche, d. h. die Formulierung eines entsprechenden Satzes der Funktionentheorie, war naheliegend. Nun hat in der Tat S. RIOS<sup>6</sup> den in Frage stehenden Satz formuliert und bewiesen. Bei der Konstruktion des Beispiels hat er im wesentlichen das nämliche Prinzip befolgt, das auch dem Referenten bei der Behandlung des reellen Falles gedient hat (dies wird in einer Fussnote von Rios erwähnt). Mit einigen unwesentlichen Modifikationen lautet dieser Satz wie folgt:

Es gibt eine Reihe analytischer Funktionen die in der ganzen Ebene lokal gleichmässig zur Summe Null konvergiert und welche folgende Eigenschaft hat: Zu jeder analytischen Funktion und einem schlichten beschränkten Regularitätsgebiet derselben lässt

<sup>1</sup> Vgl. K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Berlin, 1931, 3. Aufl., S. 328.

<sup>2</sup> E. STEINITZ, Bedingt. konvergente Reihen und konvexe Systeme. *Journ. reine u. angew. Math.*, 143 (1913), S. 128-175.

<sup>3</sup> A. WALD, Reihen in topologischen Gruppen. *Ergebnisse eines math. Koll. Wien.*, 59. und 60. Koll. (1933).

<sup>4</sup> H. HADWIGER, Ueber das Umordnungsproblem im Hilbertschen Raum. *Math. Zeitschr.*, 46 (1940), S. 79.

<sup>5</sup> H. HADWIGER, Eine Bemerkung über Umordnung von Reihen reeller Funktionen. *The Tôhoku Math. Journ.*, 46 (1939), S. 22-25.

<sup>6</sup> S. RIOS, Sobre la reordenación de series funcionales y sus aplicaciones. *Abhandli Math. Seminar der Hansischen Univ.*, 15 (1943), S. 72-75.

sich eine Umordnung der gegebenen Reihe finden, welche in dem gewählten Gebiet lokal gleichmässig gegen die gewählte analytische Funktion konvergiert.

10. — R. WAVRE. *Sur quelques hermitiens particuliers*. — L'auteur applique à quelques opérateurs hermitiens spécialement simples les propriétés concernant les conséquents par l'opérateur d'un élément particulier. Ces propriétés ont été démontrées dans deux articles des *Commentarii* (vol. 15, fasc. 4 et vol. 16, fasc. 1).

Les opérateurs envisagés dans cette communication étaient:

La détermination des axes d'une quadrique (matrice symétrique).

La multiplication d'une fonction par une autre (domaine réel)

La dérivation (multipliée par  $\sqrt{-1}$ ).

Les projecteurs, les intégrales de Fourier, l'intégrale de Poisson.

La semi-continuité de la plus haute fréquence considérée comme fonctionnelle de l'élément initial fut aussi rappelée.

---

*Séance de printemps, Berne, 6 mai 1945*

Conférence de M. le professeur Lars AHLFORS (Zurich): «Extremalaufgaben und konforme Abbildung».

---

*Réunion de Fribourg, 2 septembre 1945*

(34<sup>e</sup> assemblée annuelle)

M. DIETHELM (Schwyz): Über Anwendungen der Identitätsfunktion in der Mathematik.

P. BIDAL (Aigle): A propos du théorème d'existence des formes différentielles harmoniques.

Sophie PICCARD (Neuchâtel): Des couples de substitutions qui engendrent un groupe régulier.

Ed. ARNOUS (Paris et Leysin): Sur les statistiques attachées aux opérateurs hermitiens et leurs transformées de Fourier Stieltjes.

B. ECKMANN (Lausanne): Der Homologiering einer beliebigen Gruppe.

R. WAVRE (Genève): Curiosité géométrique.

M. PLANCHEREL (Zurich): Sur la convergence en moyenne d'une suite de solutions d'une équation aux dérivées partielles linéaire de type elliptique.