

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1942-1950)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FORMULE DU DOUBLE PRODUIT VECTORIEL
Autor: Laurenti, Fernando
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515804>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

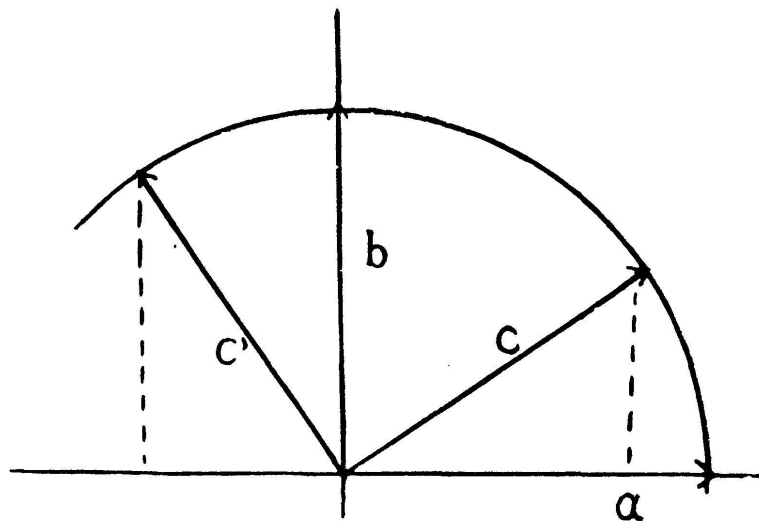
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA FORMULE DU DOUBLE PRODUIT VECTORIEL

PAR

Fernando LAURENTI (Turin, Italie).

Dans le fascicule de mars 1950 du *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, M. le professeur BOGGIO a complété la démonstration donnée par BURALI-FORTI de la formule qui donne le développement d'un double produit vectoriel. Ici je



vais donner une autre démonstration, plus simple, qui réduit la formule à démontrer, à celle analogue, relative à des vecteurs coplanaires; dans ce cas la démonstration est immédiate.

La formule dont il s'agit est la suivante:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{a} , \quad (1)$$

où \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} sont des vecteurs arbitraires.

Comme la formule est homogène par rapport aux vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , il est clair qu'il est suffisant de la démontrer dans le cas où ces vecteurs sont unitaires (verseurs).

Cela posé, démontrons d'abord la relation (1) lorsque les vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} sont coplanaires et, en outre, le vecteur \mathbf{b} est perpendiculaire au vecteur \mathbf{a} ($\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$); si l'on suppose que le vecteur \mathbf{b} dérive du vecteur \mathbf{a} par une rotation d'un angle droit dans le sens antihoraire, on voit immédiatement que $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$ représente le vecteur \mathbf{c}' qui se déduit du vecteur \mathbf{c} par une rotation d'un angle droit dans le sens antihoraire; il est alors évident que:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{b} ,$$

par conséquent

$$\mathbf{c}' = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \mathbf{b} ;$$

mais, ainsi que nous l'avons remarqué,

$$\mathbf{c}' = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} ,$$

par suite il en résulte la formule (1).

Supposons maintenant que le vecteur \mathbf{b} ne soit plus perpendiculaire au vecteur \mathbf{a} ; on pourra poser

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}' + m\mathbf{a} , \tag{2}$$

où \mathbf{b}' est un vecteur perpendiculaire au vecteur \mathbf{a} et m est un nombre réel. On aura alors:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}') \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \mathbf{b}' - (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}) \mathbf{a} ;$$

mais $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - m\mathbf{a}$, par conséquent:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) m\mathbf{a} + (m\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \mathbf{a} ,$$

et comme les deux derniers termes s'annulent, il en résulte la formule (1), qui est donc établie pour trois vecteurs coplanaires.

Supposons enfin que le vecteur \mathbf{c} ne soit pas coplanaire avec le vecteur \mathbf{a} et \mathbf{b} ; nous pourrions supposer

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}' + n\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} ,$$

où le vecteur \mathbf{c}' est coplanaire avec les vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et n est un nombre réel. D'après ce que nous venons d'établir, on a :

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}' = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}') \mathbf{b} - (\mathbf{b} \times \mathbf{c}') \mathbf{a} , \quad (3)$$

et puisque

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - n\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} ,$$

on conclut :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}' &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} , \\ \mathbf{a} \times \mathbf{c}' &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} , \quad \mathbf{b} \times \mathbf{c}' = \mathbf{b} \times \mathbf{c} , \end{aligned}$$

et la relation (3) devient alors identique à la formule (1), qui se trouve donc établie dans toute sa généralité.

RÉALITÉS ET SYMBOLISMES EN MATHÉMATIQUES

PAR

Henri LORENT (Bruxelles).

Sciences essentiellement abstraites, les mathématiques ont leurs racines dans les réalités sensibles; par leurs applications, elles préparent des actions sur d'autres réalités sensibles.

Quelle est la liaison entre les origines sensibles et les divers niveaux d'abstraction entre lesquels s'étagent les branches et les méthodes des mathématiques ?

Nous essayons ici de répondre à cette question, en supposant la mémoire des lecteurs en possession de quelque résidu de leurs études mathématiques élémentaires.

Dans notre langage figurera le mot *ensemble* pris au sens qu'il a en mathématiques depuis un gros demi-siècle. Ce mot désignera des suites d'êtres mathématiques se succédant indé-