Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1942-1950)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÉALITÉS ET SYMBOLISMES EN MATHÉMATIQUES

Kapitel: III

Autor: Lurent, Henri

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515805

En langage mathématique, on dira que les nombres entiers forment un *ensemble dénombrable*, tel qu'il a été défini à la première page de la présente note.

III

La première opération mathématique partant sur des nombres entiers est l'addition. En présence de deux ensembles finis (dont l'importance est exprimable par un nombre) d'objets ou d'unités comptés ou mesurés, l'addition dispense d'un comptage ou mesurage à nouveau, lorsque ces deux ensembles sont réunis en un seul. L'objet de l'addition est donc une économie d'action, et même une prévision d'action: car l'addition de deux entiers fait connaître d'avance, fait prévoir le résultat du comptage ou mesurage de l'ensemble qui serait constitué par la réunion de deux collections d'objets comptés ou des deux grandeurs continues mesurées.

L'objet de la soustraction, opération inverse de l'addition, est une autre économie d'action, point n'est besoin d'y insister.

Mais alors que l'opération: additionner deux nombres est toujours possible, quels que soient ces entiers, l'opération: soustraire un nombre entier d'un autre est parfois impossible.

D'un sac contenant douze noix, il est impossible d'en extraire vingt; l'opération douze noix moins vingt noix est dépourvue de sens.

C'est pour lever en mathématiques, pareille impossibilité que l'algèbre construit les nombres négatifs. Le résultat est le suivant: l'ensemble des nombres entiers positifs se prolonge à gauche par celui des négatifs dans l'ordre inverse, de manière à présenter la suite doublement indéfinie.

$$\ldots -4\,,\ -3\,,\ -2\,,\ -1\,,\quad 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4 \ldots$$

La loi de formation des termes de cette suite est la suivante: chaque terme surpasse le précédent d'une unité.

Elle laisse un vide entre $+1$ et -1, où il y a place pour un symbole correspondant à une collection d'unités épuisée, c'est-à-dire au néant, dans l'ordre d'abstraction où figurent les nombres entiers, positifs et négatifs. Ce symbole, le zéro, peut-il être considéré comme un nombre ?

La symbolique arithmétique permet de traiter zéro comme un nombre dans l'addition et la soustraction; ce qu'exprime:

$$N \pm (a - b) = N \quad \text{si} \quad b = a \,;$$

car la double opération laisse N inchangé, lui impose un changement qui est le néant. Le symbole 0 jouant alors le rôle généralisé d'un nombre, on l'exprime en disant que 0 est un nombre.

Mais dans la multiplication et la division, le rôle du zéro n'est pas toujours le même que celui d'un entier abstrait d'une collection d'unités ou d'une suite d'actions, d'opérations. Partons de la définition de la multiplication réalisable par déplacements d'objets ou de l'opérateur; multiplier un nombre entier (multiplicande) par un autre (multiplicateur), c'est réaliser la somme d'autant de collections symbolisées par le premier nombre qu'il y a d'unités dans le second. Zéro ne peut donc être multiplicateur, mais on peut lui faire jouer celui de multiplicande, car il est un nombre dans l'addition: on aura $0 \times a = 0$, quel que soit l'entier a. Convenons — par un acte de notre volonté dirigée vers l'élimination des exceptions aux règles de calcul — d'appliquer au produit $0 \times a$ le théorème: l'interversion des facteurs d'un produit conserve le produit; il en résultera que $a \times 0 = 0$, parce que, nous le répétons, nous l'avons voulu ainsi [1].

Reste la division; quel est le rôle d'un diviseur zéro ? Remarquons que chaque terme de la suite des entiers:

$$\ldots -4\,,\ -3\,,\ -2\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \ldots$$

possède un inverse fractionnaire, *sauf* 0. L'ensemble dénombrable

$$\ldots -{}^1/_4\,,\ -{}^1/_3\,,\ -{}^1/_2\,,\ -1 \quad 1\,,\ {}^1/_2\,,\ {}^1/_3\,,\ {}^1/_4\ \ldots$$

[1] Notre volonté est orientée par une condition d'ordre pratique: que les conséquences du théorème invoqué soient telles que les relations algébriques soient pratiquement valables lorsque, obtenues par des raisonnements partant sur des multiplicateurs entiers non nuls, on y annule tel facteur, des situations particulières excluant ce facteur. La même condition d'ordre pratique, dans le calcul des quaternions où figurent deux symboles mathématiques: i et j, exige la relation $ji = -ij$, qui nie la conservation d'un produit par inversion des facteurs.

présente donc une lacune. L'objet du symbolisme infinitésimal que nous aurons à considérer plus loin, est de combler cette lacune.

IV

Une seconde extension de la notion de nombre s'introduit par la division des entiers, opération inverse de la multiplication. Sous sa forme intuitive, manuellement réalisable, la division d'un groupe d'objets en sous-groupes partiels égaux n'est pas toujours possible; l'opération reste inachevée en présence d'un sous-groupe plus petit que les autres, le *reste* de la division. Il est nécessaire, au point de vue pratique comme pour la généralité des théories, de dissiper cette irrégularité. On y est parvenu en construisant la notion de *fraction.* Est-elle toujours introduite de manière à en faire comprendre le mécanisme et à en faire entrevoir la richesse ?

Une maîtresse de maison fait acheter une tarte chez le pâtissier, pour la réception d'amis. L'unité d'*achat* est la tarte entière. Si la tarte est partagée en six morceaux à peu près égaux, en vue de sa consommation par les amis, l'unité de *consommation* est le sixième de tarte; si les consommateurs sont au nombre de quatre, il reste sur le plat *deux sixièmes* de la tarte: le premier mot, *deux*, énonce le nombre des unités de consommation restantes (à remarquer que l'idée de reste n'est pas la même que dans l'expression de reste d'une division); c'est le *numérateur* de la fraction; le second mot, *sixièmes* (de la tarte), rappelle et l'unité d'achat, et le nombre des parties en lesquelles cette unité a été partagée pour constituer l'unité de consommation; c'est le *dénominateur* de la fraction. Les deux termes de la fraction ont donc des fonctions nettement différentes; ils seront traités différemment dans les calculs.

Ceci compris, l'addition et la soustraction des fractions ne présenteront pas d'obstacles durables, moyennant peut-être un nouveau changement d'unité, une réduction à un dénominateur commun.

Aussi n'est-ce pas dans ces opérations que trébuche l'enfant venu de l'école primaire à la théorie et la pratique du calcul des fractions.