Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1942-1950)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÉALITÉS ET SYMBOLISMES EN MATHÉMATIQUES

Autor: Lurent, Henri

Kapitel: VI

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515805

dont les carrés, également décroissants, sont supérieurs à 2; cependant aucun terme de la première suite n'a un carré surpassant celui d'un terme quelconque de la seconde; par contre, aucun terme de la seconde n'a un carré inférieur à celui d'un quelconque de la première; et l'on peut aller assez loin dans chacune des deux pour y trouver deux termes de même rang dont la différence soit aussi petite que l'on veut, par exemple moindre qu'une unité décimale du millionième ordre. On exprime l'ensemble de ces faits en disant que les deux suites dénombrables en question ont une limite commune, qu'on nomme la racine carrée de 2 et qu'on écrit $\sqrt{2}$. Ce symbole est donc défini par la relation $(\sqrt{2})^2 = 2$; on le nomme un nombre *irrationnel* (les entiers et les fractions étant *rationnels*)

2. Dans d'autres cas, le nombre donné est tel que la construction, à partir de lui, d'un nombre irrationnel soit impossible. Le plus simple de ces cas est celui où se pose le problème: quelle est la racine carrée de -1 ? Elle n'existe pas, même comme symbole irrationnel, puisqu'on ne peut reproduire le processus précédent, le carré d'un nombre positif ou négatif étant positif.
C'est pour ces cas que l'on a créé le symbole $i = -1$, auquel on a imposé les règles de calcul exprimées par:

$$i^2 = -1\,,\quad i^3 = -i\,,\quad i^4 = 1\,,\quad i^5 = +i, \text{ etc.}$$

Les symboles composés au moyen de i obéissent moyennant cette convention, aux règles de calcul des symboles antérieurs. On les nomme des nombres *imaginaires*, par opposition à l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels, qui est celui des nombres *réels*. Un symbole tel que $a + bi$, dont le premier terme est réel et le second imaginaire, est souvent dénommé nombre *complexe*.

VI

Nous n'avons pas encore résolu le problème réservé à la fin de l'alinéa III: intégrer aux mathématiques le fait exceptionnel que le nombre 0 n'a pas d'inverse, donc, que les nombres fractionnaires de la forme:

$$\frac{a}{b-c}$$

cessent d'exister si $c = b$ avec $a \gtrless 0$.

Reprenons l'intervalle de -1 à $+1$ dans l'ensemble dénombrable des entiers. Dans cet intervalle prennent place les inverses de tous les nombres entiers, tant négatifs que positifs. Rangés par ordre de grandeur croissante (au sens algébrique de ce qualificatif), ils se présentent ainsi:

$$-1\,,\quad -{}^1/_2\,,\quad -{}^1/_3\,,\quad -{}^1/_4\,,\quad \ldots {}^1/_4\,,\quad {}^1/_3\,,\quad {}^1/_2\,,\quad 1\,.$$

Cet ensemble transfini dénombrable des inverses des entiers est un sous-ensemble du continu; en effet, soit par exemple une droite infinie graduée dans les deux sens à partir de 0; l'ensemble de ses points a la puissance du continu; à chaque terme de l'ensemble des inverses des entiers correspond un point, et un seul de la droite, celui qui a ce terme pour abscisse.

Mais d'un ensemble ayant la puissance du continu, on peut extraire un ensemble transfini dénombrable de sous-ensembles dont chacun est dénombrable; en voici un second exemple:

$$-1\,,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad 1$$

et le lecteur multipliera aisément les exemples, à volonté.

Dans chacun, on peut imaginer un terme positif ou négatif aussi petit que l'on veut, en valeur absolue; la partie négative comme la partie positive de l'intervalle $(-1, +1)$ a pour limite 0.

Si, arrivés là, nous acceptons le *postulat* suivant: *ce qui est vrai de tous les ensembles dénombrables*, *qui sont des sous-ensembles d'un ensemble* E *ayant la puissance du continu*, *reste vrai de cet ensemble* E, nous construirons, par des passages à la limite, le calcul différentiel et le calcul intégral.

VII

Depuis Descartes, l'algèbre sert à étudier des lignes et des surfaces, considérées comme des ensembles transfinis de points,