Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 40 (1951-1954)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE DES SOUS-VARIÉTÉS D'UN ESPACE EUCLIDIEN A PLUSIEURS DIMENSIONS

Kapitel: I

Autor: Chern, Shiing-Shen

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515809

[77] B. L. Van der Waerden. Les valuations en géométrie algébrique. *Colloque d'Algèbre et de Théorie des Nombres*, Paris (1949), pp. 117-122.
[78] A. Weil. — Sur la théorie du corps de classe. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 3 (1951), pp. 1-35.
[79] E. Witt. — Zyclische Körper und Algebren der Characteristik p vom Grad p^n. *J. reine ang. Math.*, Vol. 176 (1936).
[80] D. Zelinsky. — Topological Characterisation of Fields with Valuations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 54 (1948), pp. 1145-1150.

LA GÉOMÉTRIE DES SOUS-VARIÉTÉS D'UN ESPACE EUCLIDIEN A PLUSIEURS DIMENSIONS [1]

PAR

Shiing-Shen Chern (Chicago).

La géométrie des sous-variétés d'un espace euclidien de dimension quelconque contient naturellement comme cas particuliers l'étude des courbes et des surfaces de l'espace euclidien ordinaire. Cependant, malgré l'histoire très ancienne du sujet, nos renseignements dans le cas général sont assez maigres. Dans cette conférence je me propose de parler de quelques progrès qui ont été accomplis récemment.

I

1. — Soient E^{n+N} l'espace euclidien à $n+N$ dimensions et M une variété différentiable à n dimensions régulièrement plongée dans E^{n+N}. Cela signifie que tout point de M a un voisinage dans lequel la variété peut être définie en exprimant N coordonnées de E^{n+N} comme des fonctions des n autres coordonnées ayant des dérivées partielles continues d'un ordre assez

---

[1] Conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse, tenue à Berne le 7 juin 1953.

élevé. Pour simplifier nous supposerons que M est compacte, bien que beaucoup de nos discussions soient valables sans cette hypothèse. Dans une formulation générale nous nous intéressons à des relations entre les courbures de la métrique riemannienne induite de M, les courbures relatives de M dans E^{n+N} et les propriétés topologiques de M elle-même et de sa position dans E^{n+N}.

La première idée féconde, remontant au moins à Gauss, consiste à étudier une application qui généralise l'application normale d'une surface dans l'espace euclidien ordinaire. Soit en effet $G(n, N)$ (resp. $\tilde{G}(n, N)$) la variété grassmannienne des variétés linéaires (resp. variétés linéaires orientées) à n dimensions passant par un point fixe O de E^{n+N}. Cette variété est de dimension nN. Pour $n = 1$ ou $N = 1$, $G(n, N)$ est homéomorphe à l'espace projectif réel et $\tilde{G}(n, N)$ à la sphère. Pour chaque point $x \in M$, on mène par O l'espace linéaire $T(x)$ à n dimensions parallèle au plan tangent à M en x. Cette construction conduit à l'application tangentielle $T: M \longrightarrow G(n, N)$. D'une manière analogue on définit l'application tangentielle $\tilde{T}: M \longrightarrow \tilde{G}(n, N)$, si M est orientée. Ces applications jouent un rôle fondamental dans l'étude de la géométrie de M dans E^{n+N}.

Tout d'abord l'application T induit des homomorphismes sur les groupes d'homologie. Plus précisément, soit J un groupe de coefficients et, X étant un espace topologique, désignons par $H_r(X, J)$ (resp. $H^r(X, J)$) le groupe d'homologie (resp. de cohomologie) de dimension r de X avec le groupe de coefficients J. L'application T induit les homomorphismes suivants:

$$\begin{aligned} &T_*: H_r(M, J) \longrightarrow H_r(G(n, N), J)\ , \\ &T^*: H^r(G(n, N), J) \longrightarrow H^r(M, J)\ . \end{aligned} \tag{1}$$

De plus, si J est un anneau, la somme directe des groupes de cohomologie de différentes dimensions peut être munie d'une structure d'anneau et l'homomorphisme T^* est un homomorphisme d'anneaux. Des considérations analogues sont valables pour l'application $\tilde{T}$.

De quelle manière ces homomorphismes dépendent-ils de la variété M ? Pour étudier cette question disons que deux variétés M_0 et M_1 sont régulièrement homotopes s'il existe une famille M_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ de variétés plongées, dépendant continuement de t et du point $x \in M$, qui contient les variétés données pour $t = 0$ et $t = 1$. Il est clair que pour deux variétés régulièrement homotopes les homomorphismes (1) sont les mêmes. D'autre part, M. WHITNEY a démontré que si $N \geqq n + 1$, deux variétés de dimension n dans E^{n+N} sont toujours régulièrement homotopes [1]. Dans ce cas les homomorphismes (1) dépendent de M comme variété différentiable abstraite et ne dépendent pas de sa position dans E^{n+N}. En particulier, T^* s'appellera l'homomorphisme caractéristique de M et un élément de l'image de T^* une classe caractéristique.

Il y a d'autres cas où les homomorphismes (1) ne dépendent que de M. Par exemple, si M est une hypersurface orientée $(N = 1)$, la variété $\tilde{G}(n, 1)$ est homéomorphe à une sphère de dimension n et les homomorphismes (1) sont essentiellement déterminés par le degré de l'application $\tilde{T}$. Si, de plus, n est pair, on peut démontrer que ce degré est égal à $\chi(M)/2$, où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M.

Dans le cas général il sera utile d'imposer des conditions moins restrictives sur M, en admettant les cas où M peut se rencontrer elle-même de telle sorte qu'en chaque point où M se coupe elle-même il n'y a que deux branches de M et que les plans tangents à celles-ci soient transversaux l'un à l'autre. Ce sont les variétés immergées au sens de M. WHITNEY. L'application tangentielle et la notion d'homotopie régulière s'étendent à ces variétés. Il est encore vrai que les homomorphismes (1) sont les mêmes pour deux variétés immergées régulièrement homotopes.

On en sait plus dans le cas $n = N = 1$, c'est-à-dire le cas des courbes fermées du plan avec un nombre fini de points doubles. M. WHITNEY a démontré [19] qu'il est possible d'orienter une telle courbe et de donner un signe à chaque point double tel que, si ν^+ (resp. ν^-) désigne le nombre de points doubles positifs

[1] Ce théorème a été démontré dans [20] pour $N \geqq n + 2$; mais la méthode de démonstration et le théorème que M peut être plongée topologiquement dans E^{2n} entraînent qu'il est encore vrai pour $N \geqq n + 1$.

Les nombres entre crochets [] se réfèrent à la *Bibliographie* à la fin de cet article.

(resp. négatifs), le degré de l'application tangentielle $\tilde{T}$ est égal à $1 + \nu^{+} - \nu^{-}$. Ce théorème contient comme cas particulier le théorème bien connu (« Umlaufssatz ») qui affirme que le degré de $\tilde{T}$ est égal à 1 pour une courbe fermée simple, convenablement orientée. De plus, M. WHITNEY a aussi démontré que, si les degrés des applications tangentielles de deux courbes fermées de ce genre sont les mêmes, les courbes sont régulièrement homotopes. En d'autres termes, les classes des courbes fermées régulièrement homotopes sont en correspondance biunivoque avec les entiers. J'ignore si un théorème analogue est valable pour le cas $n = N > 1$.

2. — Pour faire une étude plus approfondie des homomorphismes (1), le problème préliminaire est la connaissance des groupes d'homologie et de cohomologie des variétés $G(n, N)$ et $\tilde{G}(n, N)$. Ce problème a été traité par M. EHRESMANN [5], [8], [14], en utilisant les décompositions de ces variétés par les variétés de Schubert. Nous nous intéressons surtout aux cas où J est soit le corps Z_2 des entiers modulo deux soit le corps R des nombres réels. Faisons aussi l'hypothèse $n + 1 \leqq N$. Alors les éléments de dimension $\leqq n$ de l'anneau de cohomologie $H(G(n, N), Z_2)$ sont engendrés (au sens de la structure d'anneau) par des classes de cohomologie w^i de dimension i, $1 \leqq i \leqq n$. Les classes caractéristiques $W^i = T^* w^i$ dans M sont appelées les classes de Stiefel-Whitney. Dans les applications il sera commode d'introduire, avec l'indéterminée t, le polynome de Stiefel-Whitney:

$$W(t) = \sum_{i=0}^{n} W^i t^i, \quad W^0 = 1 . \tag{2}$$

Avec l'anneau de coefficients R les éléments de dimension $\leqq n$ de l'anneau de cohomologie de $G(n, N)$ sont engendrés par des classes p^{4k} de dimension $4k$, $4 \leqq 4k \leqq n$. Leurs images par T^*, les classes de cohomologie $P^{4k} = T^* p^{4k}$ dans M, sont appelées les classes de Pontrjagin. De même, nous introduisons le polynome de Pontrjagin:

$$\mathrm{P}(t) = \sum_{0 \leqq k \leqq \frac{n}{4}} (-1)^k \mathrm{P}^{4k} t^{4k}, \quad \mathrm{P}^0 = 1 .$$

Bien entendu, les classes de Stiefel-Whitney et de Pontrjagin sont des invariants de M comme une variété différentiable abstraite. La description de l'anneau de cohomologie de $G(n, N)$ dans le cas $n \geqq N$ est beaucoup plus compliquée.

D'après les théorèmes célèbres de M. DE RHAM, il correspond, à chaque classe de cohomologie de dimension r à coefficients réels, une forme différentielle extérieure fermée de degré r, définie modulo les dérivées des formes de degré $r - 1$. Pour notre variété $G(n, N)$, qui est transformée transitivement par le groupe de transformations orthogonales autour du point O, il suffit de nous limiter aux formes qui sont invariantes par rapport à ce groupe. Nous nous proposons de donner explicitement une telle forme correspondant à la classe p^{4k}.

Pour cela, considérons la famille de tous les repères rectangulaires qui consistent en $n + N$ vecteurs unitaires $e_1, \ldots, e_{n+N}$, deux à deux perpendiculaires. Supposons que l'élément de $G(n, N)$ est déterminé par les n premiers vecteurs $e_1, \ldots, e_n$. Pour éviter des répétitions, faisons les conventions suivantes sur nos indices:

$$1 \leqq i, j, k, l \leqq n, \quad n + 1 \leqq r, s, t \leqq n + N. \tag{4}$$

Cela étant, définissons les formes de Pfaff

$$\omega_{is} = de_i \cdot e_s, \tag{5}$$

où les produits sont des produits scalaires. Comme l'espace linéaire à n dimensions déterminé par les e_i reste fixe quand on fait sur les vecteurs e_i et e_r des transformations orthogonales indépendantes, les formes extérieures (ou ordinaires) engendrées par les ω_{is} peuvent être considérées comme des formes dans $G(n, N)$ si elles sont invariantes par ces transformations. Un exemple simple est fourni par la forme différentielle quadratique ordinaire

$$\Phi = \sum_{i,s} \omega_{is}^2. \tag{6}$$

Elle définit une métrique riemannienne dans $G(n, N)$. Pour construire des formes différentielles extérieures dans $G(n, N)$, posons d'abord

$$\Omega_{ij} = -\sum_s \omega_{is} \wedge \omega_{js}, \tag{7}$$

et puis

$$\theta_{2m} = \frac{1}{(2\pi)^m m!} \Sigma \delta(i_1 \dots i_m ; j_1 \dots j_m) \Omega_{i_1 j_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_m j_m}, \quad (8)$$

où le symbole $\delta(i_1 \dots i_m; j_1 \dots j_m)$ n'est pas nul si et seulement si $j_1, \dots, j_m$ constituent une permutation de $i_1, \dots, i_m$, auquel cas il est égal à $+1$ ou -1 suivant que la permutation est paire ou impaire. De plus, la sommation dans (8) est étendue à tous les $i_1, \dots, i_m$ de 1 à n. Il est facile de voir que les formes θ_{2m} restent invariantes, si l'on applique des transformations orthogonales indépendantes aux vecteurs e_i et e_r. Elles sont donc des formes différentielles extérieures de degré $2m$ dans $G(n, N)$. Comme Ω_{ij} est antisymétrique dans les indices i, j, on déduit immédiatement de la définition (8) que $\theta_{2m} = 0$, si m est impair.

Le théorème fondamental dans cet ordre d'idées est le fait que la forme θ_{4k}, $4 \leqq 4k \leqq n$, est fermée et que la classe de cohomologie qu'elle détermine est précisément p^{4k} [5], p. 82.

3. — Il faut appliquer ces considérations à la géométrie de la variété M dans E^{n+N}. Pour cela on emploie la méthode du repère mobile. On entend par repère dans E^{n+N} la figure formée d'un point x et de $n+N$ vecteurs unitaires $e_1, \dots, e_{n+N}$, deux à deux perpendiculaires, d'origine x. Nous nous limitons à la famille de tous les repères où x est un point de M et $e_1, \dots, e_n$ sont des vecteurs tangents à M en x. Alors les vecteurs e_s sont normaux à M en x. On a $e_s \cdot dx = 0$, et on posera $\omega_i = e_i dx$, où les produits sont des produits scalaires. La variété ayant un plan tangent en chaque point, les formes de Pfaff ω_i sont toujours linéairement indépendantes. On obtient l'application tangentielle T en menant par O l'espace linéaire à n dimensions déterminé par les vecteurs e_i.

Développons en détail les formules fondamentales de la géométrie locale de M. On peut écrire, pour la famille de repères considérée,

$$\begin{aligned} dx &= \sum_i \omega_i e_i, \\ de_A &= \sum_B \omega_{AB} e_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \quad 1 \leqq A, B \leqq n+N. \end{aligned} \quad (9)$$

On en déduit

$$0 = e_s \cdot d(dx) = e_s \cdot \sum_i de_i \wedge \omega_i = \sum_i \omega_{is} \wedge \omega_i \ .$$

Les formes ω_i étant linéairement indépendantes, cela entraîne

$$\omega_{is} = \sum_j A_{sij}\, \omega_j \ , \tag{10}$$

où

$$A_{sij} = A_{sji} \ . \tag{11}$$

Avec ces quantités, on construit les formes différentielles quadratiques ordinaires

$$\Psi_s = \sum_{i,j} A_{sij}\, \omega_i\, \omega_j \ , \tag{12}$$

qui généralisent la seconde forme fondamentale d'une surface. Si $\nu = \sum_s \nu_s \cdot e_s$ est un vecteur unitaire normal, on a en effet

$$-\, d\nu\, dx = \sum_s \nu_s\, \Psi_s \ . \tag{13}$$

On obtient les courbures riemaniennes de la métrique riemannienne induite de M par la considération des formes

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= -\sum_s \omega_{is} \wedge \omega_{js} = -\sum_{k,l,s} A_{sik} A_{sjl}\, \omega_k \wedge \omega_l \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k,l,s} (A_{sik} A_{sjl} - A_{sil} A_{sjk})\, \omega_k \wedge \omega_l \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Les expressions

$$R_{ijkl} = \sum_s (A_{sik} A_{sjl} - A_{sil} A_{sjk}) \tag{15}$$

sont essentiellement les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel. Plus précisément, si π est un élément plan passant par x déterminé par les vecteurs linéairement indépendants suivants:

$$\xi = \sum_i \xi_i\, e_i \ , \qquad \eta = \sum_i \eta_i\, e_i \ , \tag{16}$$

la courbure riemannienne en π est donnée par la formule

$$R(x, \pi) = 2 \frac{\sum\limits_{s,i,j,k,l} (A_{sik} A_{sjl} - A_{sil} A_{sjk}) \xi_i \eta_j \xi_k \eta_l}{\sum\limits_{i,j,k,l} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \xi_i \eta_j \xi_k \eta_l} . \tag{17}$$

D'après la définition des classes de Pontrjagin et le théorème à la fin du dernier paragraphe, il s'ensuit que les formes Θ_{4k} obtenues à partir de θ_{4k} en substituant aux Ω_{ij} les expressions (14) sont des formes différentielles fermées dans M et que Θ_{4k} détermine la classe P^{4k} de Pontrjagin au sens du théorème de M. de Rham. Cette proposition est due essentiellement à M. Pontrjagin [15], qui n'a du reste pas donné la correspondance exacte. On a ici une relation entre les propriétés de courbure de M et les invariants de sa structure différentiable. A ma connaissance on ne sait pas si les classes de Pontrjagin de M sont des invariants topologiques, tandis que, d'après un théorème de M. Thom [18], les classes de Stiefel-Whitney le sont.

4. — Le résultat le plus important de ce genre est peut-être la formule de Gauss-Bonnet [2], [5], [10]. Elle n'est pas exactement contenue comme cas particulier dans les considérations précédentes, mais peut-être déduite d'une manière analogue. Dans ce cas nous supposons que M est de dimension paire et orientée, de sorte que l'application tangentielle soit $\tilde{T}: M \longrightarrow \tilde{G}(n, N)$. Soient E^{n+N-1} un hyperplan passant par O et $\tilde{G}(n, N-1)$ la variété grassmannienne dans E^{n+N-1}. $\tilde{G}(n, N-1)$ est une sous-variété orientée de dimension $n(N-1)$ de $\tilde{G}(n, N)$ et définit un cycle ξ. A ce cycle correspond un cocycle γ de dimension n, à coefficients réels, qui est défini par la condition que, pour tout cycle z de dimension n, on a

$$\gamma \cdot z = KI(\xi, z) , \tag{18}$$

où le symbole KI, à droite, désigne le nombre d'intersection des cycles entre parenthèses. Comme dans le dernier paragraphe, notre problème est de trouver une forme différentielle extérieure fermée qui est invariante par le groupe des rotations autour de O transformant $\tilde{G}(n, N)$ et qui détermine la classe de cohomologie de γ au sens du théorème de M. de Rham. On trouve qu'une telle forme est donnée par

$$\Omega = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n \pi^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)!} \sum_{i_1, \ldots, i_n} \varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_{n-1} i_n}, \tag{19}$$

où $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ est $+1$ ou -1, suivant que $i_1, \ldots, i_n$ est une permutation paire ou impaire de $1, \ldots, n$, et est nul si deux i_k sont égaux. Quand on substitue dans (19) les expressions (14), on obtient une forme différentielle fermée qui détermine la classe de cohomologie de $\tilde{T}^* \gamma$. En d'autres termes, on a

$$\int_M \Omega = \tilde{T}^*(\gamma) \cdot M = \gamma \cdot \tilde{T}_*(M) = KI(\xi, \tilde{T}_*(M)),$$

où M désigne le cycle fondamental de la variété orientée M.

Il est possible de déterminer plus explicitement cette dernière expression. En effet, soit v_0 le vecteur unitaire perpendiculaire à E^{n+N-1}. Supposons que ξ et $\tilde{T}(M)$ n'ont qu'un nombre fini de points communs, c'est-à-dire que M n'a qu'un nombre fini de points où les plans tangents soient perpendiculaires à v_0. En projetant v_0 orthogonalement sur le plan tangent à chaque point x de M, on définit un champ continu de vecteurs sur M avec un nombre fini de points où les vecteurs sont nuls. On vérifie alors que $KI(\xi, \tilde{T}_*(M))$ est égal à la somme des indices des singularités de ce champ de vecteurs. Cette somme est, comme il est bien connu, égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ de M. La formule ci-dessus peut donc être écrite

$$\int_M \Omega = \chi(M). \tag{20}$$

C'est la formule de Gauss-Bonnet.

La forme sous l'intégrale dans (20) peut être écrite

$$\Omega = K(x)\,\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n = K(x)\,dV, \tag{21}$$

où dV est l'élément de volume de M et $K(x)$ est un invariant scalaire qui ne dépend que de la métrique riemannienne de M. Cet invariant n'est autre que la courbure de Lipschitz-Killing [11], [13] et possède une interprétation géométrique simple. Pour cela rappelons qu'une hypersurface a une courbure scalaire, c'est la courbure de Gauss-Kronecker qui est le quotient du déterminant de la seconde forme fondamentale par le déterminant de la première forme fondamentale. Comme la seconde forme fondamentale dépend du choix du vecteur normal, la courbure de Gauss-Kronecker est un invariant de l'hypersurface si n est pair et est déterminée au signe près si n est impair. Dans tous les cas elle est bien déterminée si l'on fixe un vecteur normal. Maintenant soient M une sous-variété générale dans E^{n+N} et $\nu = \sum_s \nu_s e_s$ un vecteur unitaire normal au point x de M. Soient $M(\nu)$ la projection orthogonale de M dans l'espace linéaire à $n+1$ dimensions déterminé par ν et le plan tangent à M en x, et $G(x, \nu)$ la courbure de Gauss-Kronecker de $M(\nu)$ au point x. Désignons par $d\sigma_{N-1}$ l'élément de volume de l'hypersphère unitaire dans l'espace normal à M en x. Son volume total est une constante donnée par

$$c_{N-1} = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}N}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}N\right)} . \tag{22}$$

Cela étant, on démontre que l'intégrale

$$\frac{c_n}{2\, c_{n+N-1}} \int G(x, \nu)\, d\sigma_{N-1} \tag{23}$$

étendue à l'hypersphère unitaire dans l'espace normal est nulle si n est impair et égale à $K(x)$ si n est pair. C'est ainsi que l'invariant $K(x)$ a été introduit par Lipschitz et Killing.

5. — Les développements ci-dessus se rapportent à l'étude de l'application tangentielle. Nous allons terminer ces discussions par des remarques sur une application analogue, l'application normale $N: M \longrightarrow G(N, n)$. Elle est définie par la condition que, pour $x \in M$, $N(x)$ est l'espace linéaire à N dimensions passant

par O et parallèle à l'espace normal à M en x. Cela conduit, d'une manière tout à fait analogue à l'application tangentielle, aux classes caractéristiques de Stiefel-Whitney et de Pontrjagin, dites normales. Nous désignons les polynomes correspondants par

$$\overline{W}(t) = \sum_{i=0}^{N} \overline{W}^i t^i , \qquad \overline{W}^0 = 1 , \tag{24}$$

$$\overline{P}(t) = \sum_{0 \leq k \leq 4N} (-1)^k \overline{P}^{4k} t^{4k} , \qquad \overline{P}^0 = 1 . \tag{25}$$

Posons

$$\overline{\Omega}_{rs} = -\frac{1}{2} \sum_{i,k,l} (A_{rik} A_{sil} - A_{ril} A_{sik}) \, \omega_k \wedge \omega_l , \tag{26}$$

et puis

$$\overline{\Theta}_{4k} = \frac{1}{(2\pi)^{2k} (2k)!} \Sigma \, \delta (r_1, \ldots, r_{2k} ; \; s_1, \ldots, s_{2k}) \, \overline{\Omega}_{r_1 s_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\Omega}_{r_{2k} s_{2k}} . \tag{27}$$

Alors la forme différentielle $\overline{\Theta}_{4k}$ est fermée et détermine la classe normale de Pontrjagin $\overline{P}_{4k}$. Il est sous-entendu que la forme $\overline{\Theta}_{4k}$ dépend de la position de M dans E^{n+N}, et non seulement de sa métrique riemannienne, contrairement au cas des classes de Pontrjagin tangentielles.

Il y a des relations entre les classes caractéristiques tangentielles et normales qu'on peut déduire commodément par l'étude de l'homéomorphisme involutif σ: $G(n, N) \longrightarrow G(N, n)$, défini en prenant pour chaque espace linéaire à n dimensions passant par O son espace linéaire perpendiculaire. Les homomorphismes induits par σ sur les groupes d'homologie et de cohomologie ont été déterminés par Wu Wen-Tsun, au moins dans les dimensions qui nous intéressent [22]. Les relations entre les classes caractéristiques, qui en résultent, peuvent être écrites sous la forme suivante:

$$W(t) \, \overline{W}(t) = 1 , \tag{28}$$

$$P(t) \, \overline{P}(t) = 1 , \tag{29}$$

où les polynomes seront multipliés formellement, la multiplication des coefficients étant celle de l'anneau de cohomologie. D'après Whitney, on appelle (28), (29) les théorèmes de dualité.

Pour justifier l'étude des classes caractéristiques, il serait important de démontrer qu'elles ne sont pas triviales. On doit à M. Wu Wen-Tsun plusieurs exemples où des classes caractéristiques ne s'annulent pas [22]. D'autre part, on a des théorèmes sur la trivialité de certaines classes caractéristiques. En particulier, d'après MM. Seifert, Whitney et Thom, la classe $\overline{W}^N$ est toujours nulle [16], [18], [21]. De plus, si M est orientable, la classe $\overline{W}^N$, qui peut être définie avec les coefficients entiers, est nulle. Cela signifie géométriquement qu'il est possible de définir sur une variété orientable un champ continu de vecteurs normaux non nuls.

II

5. — J'ai beaucoup insisté sur les propriétés topologiques de l'application tangentielle. Il y a des questions plus géométriques qui seraient aussi intéressantes. L'une des plus naturelles est la condition sur l'application $T : M \longrightarrow G(n, N)$ pour qu'elle soit une application tangentielle.

On peut donner immédiatement une condition nécessaire. Soit en effet b un vecteur unitaire fixe. Le produit scalaire $f(x) = bx$, $x \in M$, définit une fonction continue sur M. M étant compacte, cette fonction possède un maximum et un minimum, où on a $bdx = 0$. Cela veut dire que les éléments $T(x)$ correspondants sont situés dans l'hyperplan passant par O et perpendiculaire à b. Par conséquent, pour chaque b il y a au moins deux points de M dont les images par T sont dans l'hyperplan perpendiculaire à b. Pour $n = 1$ cette condition est suffisante pour que l'application T soit l'application tangentielle d'une courbe close. J'ignore si ce résultat s'étend pour n quelconque.

Néanmoins on déduit de cette condition des conséquences intéressantes. Pour simplifier supposons que M soit orientée, de sorte que l'application à considérer soit $\tilde{T} : M \longrightarrow \tilde{G}(n, N)$. Evaluons le volume de l'ensemble des points de l'hypersphère de rayon unité de E^{n+N}, chaque point étant compté un nombre de fois égal au nombre des $\tilde{T}(x)$ contenu dans son hyperplan perpendiculaire. Par la méthode de la géométrie intégrale ce