

# Appendice.

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **40 (1951-1954)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## APPENDICE.

Nous nous proposons de donner ici les formules concernant les courbures  $K(x)$  et  $K^*(x)$  et une démonstration du théorème suivant, énoncé dans le n° 6: L'inégalité (32) entraîne que la variété compacte  $M$  a ses nombres de Betti modulo 2 tous nuls pour les dimensions 1, 2, ...,  $n - 1$ .

Nous utilisons les notations du texte. Désignons par  $\nu = \sum_s \nu_s e_s$  un vecteur unitaire normal. Alors la forme (13) est la seconde forme fondamentale de la projection orthogonale  $M(\nu)$  de  $M$  dans l'espace linéaire à  $n + 1$  dimensions déterminé par  $\nu$  et par le plan tangent à  $M$  en  $x$ . Par définition, la courbure  $G(x, \nu)$  de Gauss-Kronecker de  $M(\nu)$  est égale au déterminant:

$$G(x, \nu) = \left| \sum_s \nu_s A_{sij} \right|. \quad (43)$$

Pour calculer l'intégrale dans (23) il faut développer ce déterminant. Le développement sera un polynôme homogène de degré  $n$  en  $\nu_s$ , dont un terme général est de la forme

$$\pm \nu_{s_1} \dots \nu_{s_n} A_{s_1 i_1 j_1} \dots A_{s_n i_n j_n} = \pm \nu_{t_1}^{\lambda_1} \dots \nu_{t_k}^{\lambda_k} A_{s_1 i_1 j_1} \dots A_{s_n i_n j_n},$$

où les indices  $t_1, \dots, t_k$  sont tous distincts. Pour qu'un terme donne une valeur non nulle dans l'intégrale (23) il faut que les exposants  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  soient tous pairs. On est conduit ainsi à la démonstration du résultat que l'intégrale (23) est nulle si  $n$  est impair et égale à  $K(x)$  si  $n$  est pair.

Pour exprimer l'élément de volume sur l'hypersphère de rayon unité autour de l'origine  $O$ , avec le point courant  $\nu$ , on prend un repère  $a_1, \dots, a_{n+N}$ , dont le dernier vecteur  $a_{n+N}$  est identique à  $\nu$ . Alors l'élément de volume est donné par l'expression

$$\prod_{1 \leq t \leq n+N-1} (a_t d\nu) = \prod_{1 \leq t \leq n+N-1} (a_t da_{n+N}),$$

où le produit est au sens du produit extérieur. Il est sous-entendu que ce produit est indépendant du choix des  $n + N - 1$  pre-

miers vecteurs. Dans le cas présent où  $\nu$  est un vecteur normal en  $x \in M$  nous choisissons  $a_i = e_i(x)$  et posons

$$a_r = \sum_s u_{rs} e_s(x) ,$$

de sorte que  $u_{n+N, s} = \nu_s$ . On trouve alors

$$da_{n+N} = d\nu = \sum_s d\nu_s \cdot e_s + \sum_s \nu_s de_s ,$$

d'où on déduit

$$d\nu \cdot a_i = \sum_s \nu_s \omega_{si} = - \sum_{s,j} \nu_s A_{sij} \omega_j ,$$

$$d\nu \cdot a_r = \sum_s d\nu_s u_{rs} + \sum_{s,t} \nu_s u_{rt} \omega_{st} .$$

Il s'en suit que

$$\prod_{1 \leq t \leq n+N-1} (a_t d\nu) = \pm \left| \sum_s \nu_s A_{sij} \right| d\sigma_{N-1} dV .$$

Il s'agit d'intégrer la valeur absolue de cette expression pour tous les vecteurs normaux unitaires en tous les points  $x \in M$ . Notre discussion dans le n° 6 implique que cette intégrale est  $\geq 2c_{n+N-1}$ . Utilisant l'expression (30) pour la courbure totale  $K^*(x)$ , on obtient l'inégalité (31).

Maintenant supposons que l'inégalité (32) soit valable. Cela implique que les directions auxquelles la fonction coordonnée n'a qu'un maximum et un minimum ont une mesure positive. Il s'ensuit qu'il y a une fonction coordonnée non constante qui n'a qu'un maximum et un minimum. Des inégalités de Morse résulte alors l'énoncé au début de cet appendice.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLENDOERFER, C. B., Rigidity for spaces of class greater than one, *Amer. J. Math.* 61, 633-44 (1939).
- [2] — and WEIL, A., The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, *Trans. Amer. Math. Soc.* 53, 101-129 (1943).
- [3] BLASCHKE, W., Sulla geometria differenziale delle superficie  $S_2$  nello spazio euclideo  $S_4$ , *Ann. Math. Pura Appl.* (4), 28, 205-209 (1949).
- [4] CHERN, S., On a theorem of algebra and its geometrical application, *J. Indian Math. Soc.* 8, 29-36 (1944).