PROPOS DU TRANCHET D'ARCHIMÈDE

A PROPOS DU TRANCHET D'ARCHIMÈDE

PAR

Victor Thébault, Tennie (France).

Nous avons donné ici même deux articles relatifs à cette figure universellement connue et qui sert souvent de thème à des questions d'examens, sans avoir pour autant épuisé le sujet [1]. La présente note y revient avec une configuration plus générale que celle envisagée par Archimède.

1. — Aux extrémités A, B d'une corde donnée d'un cercle (O), de rayon R, on trace deux cercles arbitraires (O_1), (O_2), de rayons R_1, R_2, tangents intérieurement au cercle (O) en A, B, et les cercles (ω_1), (ω_2), de rayons ρ_1, ρ_2, tangents à la fois aux cercles (O), (O_1), (O_2); puis on pose

$$OO_1 = a\,, \quad OO_2 = b\,, \quad \theta = \text{angle}\ (AB\,, AO)\,, \quad \varphi = \text{angle}\ (O\omega_1\,, Oz)\ .$$

Théorème. *On a la relation*

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{\cos^2\theta} \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\frac{1+\sin^2\theta}{R}\right]\right. \tag{1}$$

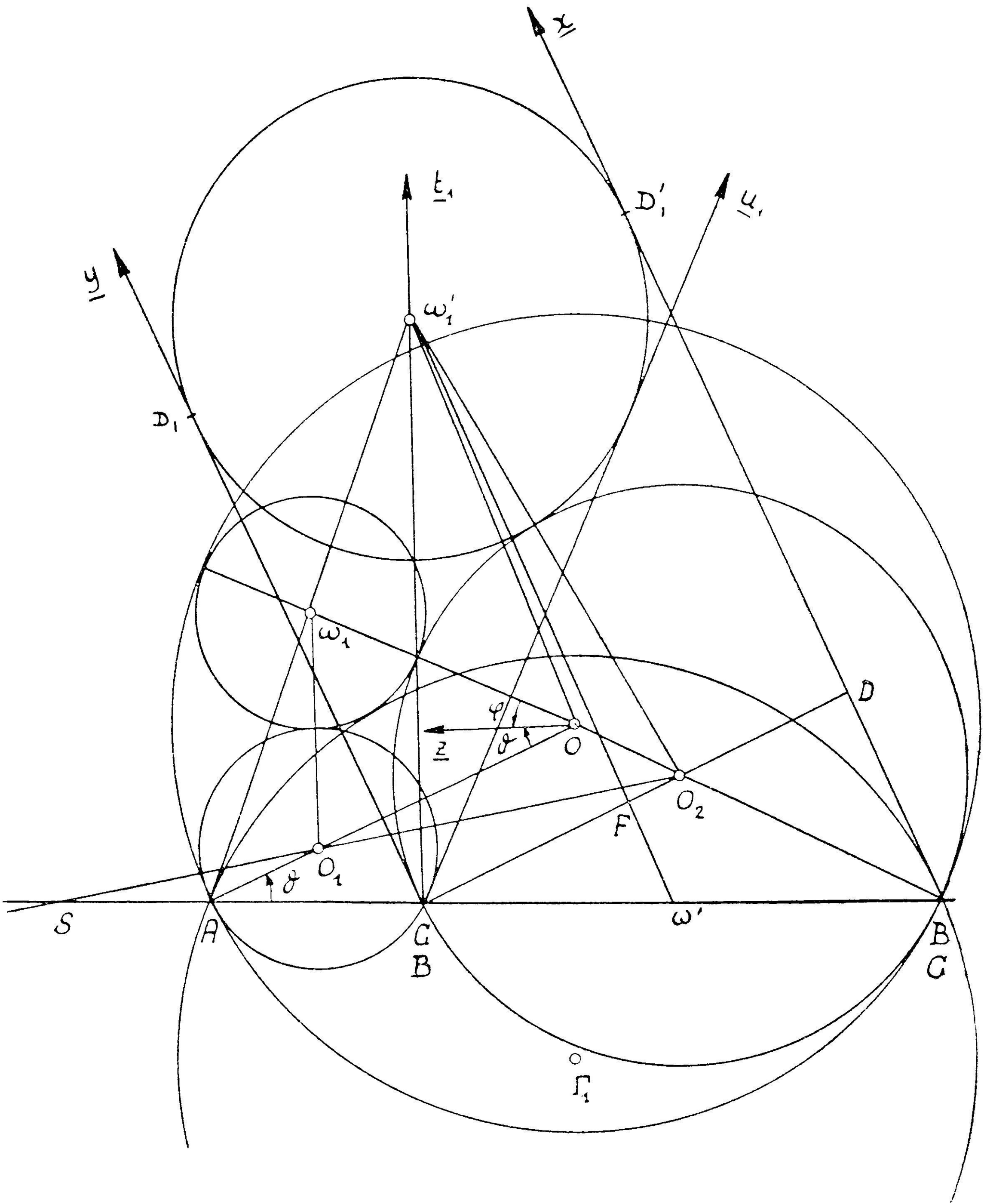
entre les éléments de la figure (fig. 1).

Dans chacun des triangles $O\omega_1O_2$, $O\omega_1O_1$, on obtient, d'abord,

$$\begin{aligned}\overline{O_2\,\omega_1}^2 &= \overline{OO_2}^2 + \overline{O\omega_1}^2 + 2OO_2\,.\,O\omega_1\cos(\varphi - \theta)\\ \overline{O_1\,\omega_1}^2 &= \overline{OO_1}^2 + \overline{O\omega_1}^2 - 2OO_1\,.\,O\omega_1\cos(\varphi + \theta)\ ,\end{aligned}$$

---

[1] *L'Ens. math.*, vol. 33, 1934, pp. 349-359; vol. 34, 1935, pp. 309-324.



ensuite

$$a\,(\mathrm{R} - \rho_1)\cos(\varphi + \theta) = 2\mathrm{R}\rho_1 - a\,(\mathrm{R} - \rho_1)$$
$$-\,b\,(\mathrm{R} - \rho_1)\cos(\varphi - \theta) = 2\mathrm{R}\rho_1 - b\,(\mathrm{R} - \rho_1)\ ,$$

puis, en multipliant les deux membres de ces égalités par b et a, en ajoutant et retranchant,

$$ab\,(\mathrm{R} - \rho_1)\sin\varphi\sin\theta = (a + b)\,\mathrm{R}\rho_1 - ab\,(\mathrm{R} + \rho_1)$$
$$ab\,(\mathrm{R} - \rho_1)\cos\varphi\sin\theta = (a - b)\,\mathrm{R}\rho_1\ ,$$

et enfin

$$\left[\frac{(a + b)\,\mathrm{R}\rho_1 - ab\,(\mathrm{R} + \rho_1)}{ab\,(\mathrm{R} - \rho_1)\sin\theta}\right]^2 + \left[\frac{(a - b)\,\mathrm{R}\rho_1}{ab\,(\mathrm{R} - \rho_1)\cos\theta}\right]^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1\ .$$

Il en résulte l'équation du second degré en ρ_1

$$[(a^2 + b^2) + 2ab \cos \theta) R^2 - 2ab (a + b) R \cos^2 \theta - (ab \sin \theta \cos \theta)^2] . \rho_1 - 2ab R \cos^2 \theta [(a + b) R - ab (1 + \sin^2 \theta)] . \rho_1 + (abR \cos^2 \theta)^2 = 0 \quad (2)$$

dont les racines donnent les mesures des rayons ρ_1, ρ_2 des cercles (ω_1), (ω_2). Des relations classiques entre la somme et le produit des racines de cette équation, on déduit l'égalité (1) qui, pour $\theta = 0$, se réduit à la formule bien connue [1]

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{R},$$

lorsque la corde AB se confond avec un diamètre du cercle (O). (*Tranchet d'*Archimède.)

Corollaire. *Si la somme* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ *conserve une valeur constante, il en est de même de la somme* $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ *et, dans cette hypothèse, la droite* $O_1 O_2$ *passe par un point fixe.*

La constance des deux sommes provient de la formule (1). D'autre part, les cercles (ω_1), (ω_2) sont les transformés du cercle (O) par l'inversion de module $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$, dont le centre coïncide avec le pôle P de la corde AB par rapport au cercle (O), et la droite $O_1 O_2$ passe par un point fixe situé sur OP.

Théorème. *Les centres de similitude* S_1, S_2 *des cercles* (ω_1), (ω_2) *avec le cercle* (O) *sont situés sur l'axe radical des cercles* (O_1), (O_2) *et les cercles de centres* S_1, S_2 *orthogonaux aux cercles* (O_1), (O_2) *sont tangents au cercle* (O).

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème de Stewart au triangle $O\omega_1 O_1$ et à la cévienne $O_1 S_1$ qui partage le segment $O\omega_1$ dans le rapport $OS_1 : O\omega_1 = R : \rho_1$ pour obtenir, après réductions et par analogie, les expressions

$$(P_1) = \left(\frac{2R\rho_1}{R + \rho_1}\right)^2, \qquad (P_2) = \left(\frac{2R\rho_2}{R + \rho_2}\right)^2$$

des puissances des points S_1, S_2 par rapport aux cercles (O_1), (O_2). De plus, les rayons des cercles de centres S_1, S_2 orthogonaux

---

[1] *Journal de* Bourget, 1878-287, question **113**.

aux cercles (O_1), (O_2) ont pour mesures

$$\frac{2R\rho_1}{R+\rho_1} = R - \frac{R(R-\rho_1)}{R+\rho_1} = R - OS_1 \quad \text{et} \quad R - OS_2 ,$$

ce qui achève d'établir la proposition.

THÉORÈME. *Si l'on trace des cercles* (O_1), (O_2) *tangents au cercle* (O) *en* A, B *et des cercles* (O_1'), (O_2') *tangents au cercle* (O) *en* A, B, *de manière que* $OO_2 = AO_1'$, $OO_1 = BO_2'$, *les cercles tangents aux cercles* (O), (O_1), (O_2) *et* (O), (O_1'), (O_2') *sont tangents au cercle* (O) *aux mêmes points.*

En effet, les points de contact du cercle (O) avec les cercles (ω_1), (ω_2) tangents aux cercles (O), (O_1), (O_2) coïncident avec les contacts des tangentes au cercle (O) menées par le point $S \equiv (AB,\ O_1 O_2)$ avec celui-ci et qui se confondent nécessairement avec les points de contact du cercle (O) avec les cercles (ω_1'), (ω_2') tangents aux cercles (O), (O_1'), (O_2'), car les points A, B étant antihomologues sur les cercles (O_1) et (O_2), (O_1') et (O_2'), les droites AB, $O_1 O_2$, $O_1' O_2'$ sont concourantes.

2. — Dans ce qui suit, on suppose que le cercle (O) et la corde AB restent fixes, tandis que les cercles (O_1), (O_2) sont variables et se coupent en un point C qui se déplace sur la corde AB entre A et B.

Dans ces hypothèses, il est clair que les cercles (O_1), (O_2) se rencontrent sous un angle constant $(OB, AO) = 2\theta'$ (figs. 1-2).

D'autre part, par l'inversion i de pôle A, dont la puissance est $\overline{AB} \,.\, \overline{AC}$, les points B, C s'échangent, le cercle (O_2) se transforme en lui-même, tandis que les cercles (O_1), (O) se changent en deux droites Bx, Cy perpendiculaires à la droite AO, dont la première coupe le cercle (O_2) sous l'angle $2\theta'$, alors que la seconde est tangente au cercle (O_2) en C; les cercles (ω_1), (ω_2) tangents aux cercles (O), (O_1), (O_2) se transforment en deux cercles égaux (ω_1'), (ω_2'), de rayon $\rho_1' = \rho_2'$, tangents au cercle (O_2) et aux droites Bx, Cy.

THÉORÈME. *Les cercles* (ω_1), (ω_2) *enveloppent le cercle* (O) *et, chacun, un cercle* (Γ_1), (Γ_2) *et leurs centres* ω_1, ω_2 *décrivent,* *chacun, une ellipse* (E_1), (E_2) *ayant pour foyer commun le centre* O *du cercle* (O) *et pour second foyer le centre* Γ_1, Γ_2 *du cercle* (Γ_1), (Γ_2).

Il suffira d'examiner ce qui se passe pour le cercle (ω_1). Si l'on désigne par D, F les points de rencontre de la droite $O_2 C$ avec la droite Bx et la parallèle à celle-ci menée par le centre ω_1' du cercle (ω_1'), d'après ce qui précède, on obtient les relations

$$O_2 D = R_2 \cos 2\theta' \,, \quad 2\rho_1' = CD = CO_2 + O_2 D = R_2 \,. \, (1 + \cos 2\theta') \,,$$
$$O_2 F = FD + DO_2 = \rho_1' - O_2 D = \frac{R_2}{2} (1 - \cos 2\theta') \,,$$

dont il résulte que le rapport $\frac{O_2 F}{O_2 C}$ et, par suite, le rapport $\frac{FC}{F\omega_1'}$, conservent des valeurs constantes. Le triangle $O_2\, \omega_1' C$ reste donc semblable à lui-même quand le point C varie sur AB.

L'inversion i intervertit les points B, C et dans cette seconde figure, si A, B sont des points fixes, le centre ω_1' du cercle (ω_1') décrit une droite fixe Bt_1 passant par B. La seconde tangente Bu_1 à ce cercle est donc fixe. Dès lors, dans la figure initiale, lorsque C varie entre A et B, le cercle (ω_1) reste tangent aux deux cercles fixes (O), (Γ_1) inverses des droites $By \equiv Cy$ et Bu_1. Puisque le cercle (ω_1) touche le cercle (O) intérieurement et le cercle (Γ_1) extérieurement, son centre décrit une ellipse (E_1) de foyers O et Γ_1. Il est évident que les enveloppes du cercle (ω_1) et le lieu de son centre ω_1 sont composés des arcs de (O), (Γ_1), (E_1) situés au-dessus de AB.

COROLLAIRE. *Le cercle* (γ) *transformé d'une droite arbitraire* $B\Delta$ *située à l'intérieur de l'angle des tangentes* By, Bu_1 *au cercle* (ω_1') *de la seconde figure, par l'inversion* i, *rencontre les cercles correspondants* (ω_1) *de la première sous un même angle.*

Car la droite $B\Delta$ coupe les cercles (ω_1') sous un même angle. En particulier, le cercle (γ) qui correspond à la droite Bt_1 coupe orthogonalement tous les cercles (ω_1), lorsque C varie entre A et B.

3. — Supposons maintenant que le point C reste fixe entre A et B et modifions légèrement les notations. Soient (ω_1), (ω_2),

(ω_3), ..., (ω_n) les cercles, de rayons ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n, tangents respectivement aux trois cercles $[(O), (O_1), (O_2)]$, $[(O), (O_1), (\omega_1)]$, $[(O), (O_1), (\omega_2)]$, ..., $[(O), (O_1), (\omega_{n-1})]$.

THÉORÈME. *Le centre ω_k, $(1 \leqslant k \leqslant n)$, de l'un des cercles de la couronne de cercles (ω_1), (ω_2), ..., (ω_n) décrit une ellipse (E_k) ayant pour foyers les centres* O, O_1 *des cercles* (O), (O_1) *et un sommet en* A.

Car
$$OO_k + O_1 O_k = R - \rho_k + R_1 + \rho_k = R + R_1 \ ;$$
de plus, (E_k) passe par le point A qui est une position limite du centre ω_k du cercle (ω_k).

Les centres des cercles de la couronne de cercles déterminée par les cercles (O), (O_1), au-dessous de AB, appartiennent aussi à l'ellipse (E_k). Ceux des cercles des couronnes de cercles relatives aux cercles (O), (O_2), au-dessus et au-dessous de AB, sont situés sur une autre ellipse de foyers O, O_2 ayant un sommet en B.

NOTES. — 1. Si l'on transforme la figure par l'inversion i, les cercles (ω_k) se changent en des cercles égaux (ω_k') dont les centres ω_k' sont alignés sur une perpendiculaire à la droite AO. Le cercle (γ) transformé d'une droite arbitraire située entre les tangentes By et Bu_1 à ces cercles, rencontre les cercles (ω_k) sous le même angle. En particulier, le cercle transformé de leur ligne des centres $B\omega_k'$ est orthogonal aux cercles (ω_k).

2. Lorsque le point C varie entre A et B, les cercles (ω_k) envisagés se transforment par l'inversion i en une suite de cercles (ω_k') dont le cercle (ω_1') considéré au paragraphe 2 fait partie. La tangente Bu_k relative au cercle (ω_k'), de rang k, de cette suite reste fixe ; de sorte que le cercle (ω_k) qui lui correspond enveloppe le cercle (O) et un cercle (Γ_k), passant par A et B, et son centre ω_k décrit une ellipse (E_k') de foyers O, Γ_k.

3. Considérons la chaîne de cercles (ω_1), (ω_2), ..., (ω_n), de rayons ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n, tangents aux trois cercles (O), (O_2), (ω_1), et tangents entre eux de proche en proche. L'inversion i transforme ces cercles en les cercles égaux (ω_1'), (ω_2'), ..., (ω_n'),

de rayons ρ_1', tangents aux droites parallèles By et Cx, respectivement en D_1, D_2, ..., D_n et D_1', D_2', ..., D_n'. Désignons par M et N les points de contact de $(\omega_1'$ et (O_2) et le point de rencontre de la tangente à ces deux cercles en M avec By; par ω_1'', ω_1''' et ω' les projections orthogonales de ω_1, ω_1' sur AB et le milieu de BC (fig. 2).

On obtient déjà

$$BC = 2R_2 \sin \theta', \qquad \rho_1' = \frac{BC}{2} \sin \theta' = R_2 \sin^2 \theta',$$

puis

$$D_1 B = 2MN = 2\sqrt{R_2 \rho_1'} = 2R_2 \sin \theta', \qquad DC = R_2 \sin 2\theta',$$

ce qui donne, d'abord,

$$\operatorname{tang} \widehat{D_1 B \omega_1'} = \frac{\rho_1'}{D_1 B} = \frac{1}{2} \sin \theta',$$

ensuite, de proche en proche,

$$\operatorname{tang} \widehat{D_2 B \omega_2'} = \frac{\rho_1'}{2\rho_1' + D_1 B} = \frac{\sin \theta'}{2(1 + \sin \theta')}, \ \ldots,$$

$$\operatorname{tang} \widehat{D_n B \omega_n'} = \frac{\sin \theta'}{2[1 + (n-1) \sin \theta']}.$$

Si $\theta' = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la figure du tranchet pour laquelle

$$\operatorname{tang} \widehat{D_n B \omega_n'} = \frac{1}{2n}.$$

D'autre part,

$$\omega_1' \omega' = \frac{1}{2}(D_1 B + D_1' C) = R_2 \sin \theta' (2 + \cos \theta');$$

et, comme les cercles (ω_1) et (ω_1') se correspondent, à la fois, dans l'inversion i et dans une homothétie de pôle A,

$$\frac{\omega_1 \omega_1''}{2\rho_1} = \frac{\omega_1' \omega_1'''}{2\rho_1'} = \frac{1}{2}(2 + \cos \theta').$$

C'est la formule connue

$$\frac{\omega_1 \omega_1''}{2\rho_1} = 1$$

relative au tranchet, quand $\theta' = \frac{\pi}{2}$.

Les mêmes conclusions ont lieu pour la chaîne des cercles analogues tangents aux trois cercles (O), (O_1), (ω_1).

4. — CAS PARTICULIER: TRANCHET D'ARCHIMÈDE. Tout ce qui précède s'applique à cette figure dans laquelle la corde AB se confond avec un diamètre du cercle (O). Certaines des propriétés invoquées présentent cependant un intérêt particulier. Ainsi, en conservant la figure et les notations du paragraphe 3:

Les cercles (ω_k) *sont orthogonaux au cercle décrit sur la distance du point* A *à son conjugué harmonique* A', *par rapport à* C *et* B, *comme diamètre et le cercle décrit sur un segment arbitraire* AI *dont l'extrémité* I *est centre* A *et* A', *comme diamètre, coupe les cercles* (ω_k) *sous le même angle.*

Cette allusion au tranchet d'ARCHIMÈDE nous incite, pour terminer, à rappeler un triangle spécial dont nous avons signalé de très nombreuses propriétés [1].

Si l'on considère deux cercles arbitraires (O_1), (O_2) tangents intérieurement au cercle (O) aux extrémités A et B d'un diamètre de celui-ci et tels que $OO_1 = a$, $OO_2 = b$, en se rapportant à deux axes rectangulaires suivant les diamètres perpendiculaires AB, A_1 B_1 du cercle (O), on obtient les coordonnées

$$x_H = \frac{(a-b)(2R-a-b)R}{(a+b)R-ab}, \qquad y_H = R - \frac{(a^2+b^2)R}{(a+b)R-ab}, \qquad (3)$$

$$x_\omega = \frac{(a-b)R^2}{(a+b)R-ab}, \qquad y_\omega = \frac{2R\sqrt{ab(R-a)(R-b)}}{(a+b)R-ab}, \qquad (4)$$

d'une part, de l'orthocentre H du triangle PQV dont les sommets P, Q et V coïncident avec les milieux des demi-circonférences (O_1), (O_2), au-dessus de AB, et avec celui de la demi-circonférence (O), au-dessous de AB; d'autre part, du centre ω du cercle tangent aux cercles (O), (O_1), (O_2).

Dans le tranchet, où $a + b = R$, on obtient $x_H = x_\omega$, et, d'après (3), (4), *la droite* ωH *qui joint le centre du cercle inscrit au tranchet à l'orthocentre du triangle* PQV *est perpendiculaire au diamètre* AB *du cercle* (O) *et réciproquement.*

(20 octobre 1950.)

[1] 1935, *loc. cit.*