Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1955)

Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications

Séance de printemps, Bâle, 8 mai 1955.

Cette séance a été consacrée à la commémoration du tricentenaire de la naissance de Jakob Bernoulli.

Conférences de M. le professeur J.-E. HOFMANN (Ichenhausen): Einige Beiträge Jakob Bernoullis zur Infinitesimalmathematik [1] et de M. le professeur B.-L. van der WAERDEN (Zurich): Jakob Bernoulli als Begründer der mathematischen Statistik.

Réunion de Porrentruy, 25 septembre 1955.

La Société mathématique suisse a tenu sa 44e assemblée annuelle à Porrentruy, le 25 septembre 1955, sous la présidence de M. le professeur J.-J. Burckhardt, président, en même temps que la 135e session annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative*, la société a constitué comme suit son comité pour les années 1956 et 1957: MM. les professeurs E. STIEFEL (Zurich), président; G. VINCENT (Lausanne), vice-président; H. JECKLIN (Zurich), secrétaire-caissier.

Le Comité national suisse de l'Union mathématique internationale est formé, pour la même période, de MM. les professeurs SAXER et DE RHAM et des trois membres du nouveau comité.

L'assemblée a désigné les membres de la Commission nationale de l'enseignement mathématique: MM. E. BATSCHELET (Bâle), J.-P. EXTERMANN (Genève), F. FIALA (Neuchâtel), L. PAULI (Neuchâtel), G. DE RHAM (Lausanne), ROTH-DESMEULES (Lucerne), F. STEIGER (Berne), E. TROST (Zurich). MM. DE RHAM et TROST en sont les délégués auprès de la CIEM.

La *partie scientifique* a été consacrée aux communications suivantes:

S. PICCARD (Neuchâtel): 1. Les systèmes fixes d'éléments générateurs d'un groupe; 2. Quelques problèmes de la théorie des groupes.

---

[1] Le texte de cette conférence sera publié dans cette revue.

H. MEIER-WUNDERLI (Zurich): Aus der Theorie der Abelschen Gruppen.

M. KERVAIRE (Berne): Courbure intégrale généralisée et homotopie.

G. VINCENT (Lausanne): Sur les représentations linéaires de certains groupes finis.

S. PICCARD (Neuchâtel): Sur des ensembles parfaits.

Les systèmes fixes d'éléments générateurs d'un groupe, par Sophie PICCARD, Neuchâtel.

Soit G un groupe d'ordre fini N qui admet des automorphismes externes de deux espèces. Un automorphisme externe est dit de première espèce s'il fait correspondre à tout élément a de G son transformé bab^{-1} par un élément fixe b d'un groupe G_1 plus vaste que G et dont G est un sous-groupe distingué. Un automorphisme externe est dit de seconde espèce s'il ne peut pas être réalisé de cette façon. Soit $\mathfrak{A}_1$ [$\mathfrak{A}_3$] le groupe de tous les automorphismes internes [de tous les automorphismes] du groupe G. L'ensemble $\mathfrak{A}_2$ de tous les automorphismes internes et externes de première espèce constitue également un groupe dont $\mathfrak{A}_1$ est un sous-groupe distingué et qui est à son tour un sous-groupe de $\mathfrak{A}_3$. Quel que soit l'élément a et quel que soit l'automorphisme A de G, nous désignons par Aa l'élément de G homologue de a dans A. Nous appelons base de G tout système d'éléments indépendants générateurs de G. Tout automorphisme de G transforme une base de G en une base de G (pas nécessairement distincte de la première). Soit A un automorphisme, soit $a_1, \ldots, a_m$ une base quelconque de G et soit $\mathrm{A}a_i = b_i$, $i = 1, \ldots, m$. Les m couples ordonnée a_i, b_i ($i = 1, \ldots, m$) définissent l'automorphisme A de façon univoque. m est l'ordre de chacune des bases $a_1, \ldots, a_m$ et $b_1, \ldots, b_m$. On peut répartir aussi bien les éléments que les bases d'ordre donné de G en classes d'éléments respectivement de bases équivalents relativement à chacun des trois groupes $\mathfrak{A}_i$. Nous dirons, pour abréger, que deux éléments a et b de G sont i-équivalents s'il existe un automorphisme A du groupe $\mathfrak{A}_i$, tel que $\mathrm{A}a = b$, et nous dirons que deux bases d'ordre m: $a_1, \ldots, a_m$ et $b_1, \ldots, b_m$ de G sont i-équivalentes s'il existe un automorphisme A du groupe $\mathfrak{A}_i$, tel que $\mathrm{A}a_j = b_j$, $j = 1, \ldots, m$, quel que soit $i = 1, 2, 3$. Deux éléments ou deux bases 1-équivalents de G sont conjugués. Deux bases équivalentes sont caractérisées par les mêmes relations fondamentales. Tout automorphisme du groupe $\mathfrak{A}_i$ transforme en elle-même chaque classe d'éléments i-équivalents de G. Nous disons qu'un élément a de G est un élément fixe d'un automorphisme A si $\mathrm{A}a = a$. Nous disons qu'une base de G est une base fixe d'un automorphisme A si cette base est transformée en elle-même par A. L'élément unité 1 de G est fixe dans

tous les automorphismes de G et l'automorphisme identique A^0 laisse fixe tous les éléments et toutes les bases de G. Une base fixe a_1, a_2 du second ordre d'un automorphisme A détermine ce dernier de façon univoque et, si $A \neq A_0$, on a $Aa_1 = a_2$, $Aa_2 = a_1$, $A^2 = A_0$, autrement dit l'automorphisme A est du second ordre, il permute les deux éléments a_1 et a_2 et la base a_1, a_2 n'est fixe dans aucun autre automorphisme non identique du groupe G. Supposons que G possède des bases du second ordre et que son centre est d'ordre 1. Soit ν_i l'ordre du groupe $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, 3$.

Soit a_1, a_2 une base de G. Nous disons que cette base est de première espèce par rapport aux automorphismes du groupe $\mathfrak{A}_i$ si la base envisagée n'est fixe dans aucun des automorphismes $\neq A_0$ de $\mathfrak{A}_i$ et nous disons que la base a_1, a_2 est de seconde espèce par rapport aux automorphismes du groupe $\mathfrak{A}_i$ s'il existe un automorphisme $A \neq A_0$ du groupe $\mathfrak{A}_i$ qui laisse cette base fixe, quel que soit $i = 1, 2, 3$. Pour toute base de première (seconde) espèce par rapport aux automorphismes du groupe $\mathfrak{A}_i$ il existe ν_i $(\nu_i/2)$ bases de G qui lui sont i-équivalentes, quel que soit $i = 1, 2, 3$.

Tout automorphisme effectue une substitution des éléments de G. L'étude de ces substitutions permet de déterminer les bases de G et l'examen des substitutions des éléments de G qui correspondent aux automorphismes du second ordre permet de déterminer toutes les bases de seconde espèce.

Envisageons, à titre d'exemple, l'alterné $\mathfrak{A}_6$ de degré 6. Il possède, comme on sait, 360 automorphismes internes, 360 automorphismes externes de première espèce et 720 automorphismes externes de seconde espèce. Le groupe $\mathfrak{A}_1$ $(\mathfrak{A}_2)$ est simplement isomorphe à $\mathfrak{A}_6$ $(\mathfrak{S}_6)$ et chaque automorphisme interne ou externe de première espèce est représenté par une substitution paire des éléments de $\mathfrak{A}_6$. Par contre, les automorphismes externes de seconde espèce sont représentés par des substitutions impaires des éléments de $\mathfrak{A}_6$. 144 de ces substitutions sont d'ordre 10, 360 d'ordre 8, 180 d'ordre 4 et 36 du second ordre. Les deux éléments de toute base fixe dans un automorphisme externe de seconde espèce de $\mathfrak{A}_6$ figurent dans une transposition de la substitution du second ordre qui représente un automorphisme externe déterminé de seconde espèce du groupe $\mathfrak{A}_6$. Chaque automorphisme externe de seconde espèce de $\mathfrak{A}_6$ qui est du second ordre laisse fixe 10 éléments du groupe, notamment quatre cycles du 5e ordre, cinq doubles transpositions et 1 et il laisse fixes 140 bases du second ordre de $\mathfrak{A}_6$. Le nombre total des bases de $\mathfrak{A}_6$ laissées fixes par l'un quelconque des automorphismes externes de seconde espèce de $\mathfrak{A}_6$ est de 5040. Le nombre total des bases de $\mathfrak{A}_6$ laissées fixes par un quelconque des automorphismes internes $\neq A_0$ de $\mathfrak{A}_6$ est de 2160. 720 bases de $\mathfrak{A}_6$ au total sont laissées fixes par les différents automorphismes externes de première espèce et le nombre total des bases du second ordre de $\mathfrak{A}_6$ qui sont de seconde espèce par rapport aux automor-

phismes du groupe $\mathfrak{A}_3$ est de 7920 alors que 30 240 bases du second ordre de $\mathfrak{A}_6$ sont de première espèce et ne sont laissées fixes par aucun automorphisme $\neq A_0$ de $\mathfrak{A}_3$.

Quelques problèmes de la théorie des groupes, par Sophie PICCARD, Neuchâtel.

Soit G un groupe d'ordre fini N défini par un système d'éléments générateurs

$$a_1, \ldots, a_m \tag{1}$$

liés par les relations caractéristiques

$$f_i(a_1, \ldots, a_m) = 1, \; i = 1, \ldots, k \; . \tag{2}$$

Appelons multiplication la loi de composition du groupe G et appelons base d'ordre m de G le système d'éléments générateurs (1). Il n'est généralement pas aisé d'étudier la structure d'un groupe G ainsi défini. Il existe cependant des cas où un simple examen des relations (2) fournit de nombreux renseignements sur la structure de G et permet de déceler la présence de certains sous-groupes distingués, de déterminer le nombre minimum d'éléments générateurs de G, d'indiquer une borne supérieure au nombre total des bases minima et une borne inférieure au nombre total de sous-groupes distingués de G, etc. Nous nous sommes attachés aux cas suivants.

Soit n un entier quelconque $\geqslant 2$ et soit

$$a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots, a_{l_t} \; (1 \leqslant t \leqslant m, \; 1 \leqslant l_1 < l_2 < \ldots < l_t \leqslant m) \tag{3}$$

t éléments quelconques de la base (1). Nous disons que G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à l'ensemble de ces éléments si f_i est de degré $\equiv 0$ (mod n) par rapport à l'ensemble des éléments (3) quel que soit $i = 1, \ldots, k$, et nous disons que G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à chacun des éléments (3) si f_i est de degré $\equiv 0$ (mod n) par rapport à a_{l_j}, $j = 1, \ldots, t$, $i = 1, \ldots, k$.

Si G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à chacun des éléments (3), il jouit évidemment aussi de la propriété P (mod n) par rapport à l'ensemble de ces éléments. La réciproque n'est pas vraie. Si $t < m$, le groupe G peut jouir de la propriété P (mod n) par rapport à chacun des éléments (3) de la base (1) et être dépourvu de la même propriété par rapport à une seconde base de G. Par contre, si le groupe G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à chacun des éléments de sa base (1), cette base est minimum et le groupe G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à tout élément de chacune de ses bases minima.

Si le groupe G jouit de l'une ou l'autre des propriétés P (mod n) par rapport aux éléments (3) de l'une quelconque de ses bases (1), G n'est pas simple et il possède au moins un sous-groupe distingué d'ordre N/n, l'ordre de chacun des éléments (3) ainsi que l'ordre de G sont des multiples de n et on peut répartir les éléments de G en n classes $A_0, \ldots, A_{n-1}$ composées chacune de N/n éléments de G et comprenant, avec tout élément a de G, la classe entière des éléments de G conjugués à a. Les classes A, avec la loi de composition $A_u A_v = A_w$, où $w \equiv u + v \pmod{n}$ forment un groupe abélien d'ordre n dont l'élément zéro A_0 est un sous-groupe distingué de G.

Si le groupe G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à chacun des éléments (3), on peut répartir les éléments de G en n^t classes $M_{i_1 \ldots i_t}$, où les indices $i_1, \ldots, i_t$ sont des nombres de l'ensemble $\{0, \ldots, n-1\}$. Chaque classe $M_{i_1 \ldots i_t}$ comprend N/n^t éléments de G et elle contient avec tout élément a de G la classe entière des éléments de G conjugués à a. Si $t = m$, les classes M ont un caractère intrinsèque et sont indépendantes de la base (1). Avec la loi de composition $M_{u_1 \ldots u_t} M_{v_1 \ldots v_t} = M_{w_1 \ldots w_t}$, où $w_j \equiv u_j + v_j \pmod{n}$, $j = 1, \ldots, t$, les classes M forment un groupe abélien Γ dont l'élément zéro $M_{00..0}$ est un sous-groupe distingué de G. Quel que soit le sous-groupe γ de Γ, la réunion des classes M qui constituent les éléments de γ est un sous-groupe distingué de G.

Si le groupe G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à l'ensemble [par rapport à chacun] des éléments (3) de sa base (1), il jouit évidemment de la propriété P (mod d) par rapport à l'ensemble [par rapport à chacun] des éléments (3), quel que soit le diviseur $d > 1$ de n et par conséquent G possède au moins un sous-groupe distingué d'ordre N/d quel que soit le diviseur $d > 1$ de n. Si G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à chacun des éléments (3), il possède au moins un sous-groupe distingué d'ordre N/d^t, quel que soit le diviseur $d > 1$ de n.

Si G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à chacun des éléments de sa base (1), cette base est minimum et le nombre total $\mathfrak{u}$ de bases minima de G satisfait l'inégalité

$$\mathfrak{u} \leqslant (N/p^m)^m (p^m - 1)(p^m - p) \ldots (p^m - p^{m-1})/m\,!$$

où p est le plus petit diviseur premier de n.

Si le groupe G jouit de la propriété P (mod n) par rapport à chacun des éléments de sa base (1), quel que soit le nombre premier p diviseur de n, le groupe G possède au moins $(p^m - 1)(p^m - p) \ldots (p^m - p^{i-1})/(p^i - 1)(p^i - p) \ldots (p^i - p^{i-1})$ sous-groupes distingués distincts d'ordre N/p^{m-i}, $i = 1, \ldots, m-1$.

Tout groupe abélien jouit de la propriété P (mod α_1) par rapport à chaque élément de n'importe laquelle de ses bases minima, α_1 désignant le plus petit des invariants du groupe considéré.

Il existe aussi des groupes non abéliens qui jouissent de la propriété P (mod n) par rapport à tout élément de chacune de leur bases minima. Ainsi, par exemple, le groupe non abélien G_{108}, d'ordre 108, engendré par les deux substitutions

$$S_1 = (1\,2)\,(3\,4)\,(5\,6\,7)\,(11\,12\,13\,14\,15\,16)\,, \quad S_2 = (1\,3)\,(2\,4)\,(5\,6)\,(8\,9\,10)$$

jouit par rapport à chacune des substitutions S_1 et S_2 de la propriété P (mod 6), puisque S_1 et S_2 sont liées par les relations fondamentales

$$S_1^6 = 1\,, \quad S_2^6 = 1\,, \quad S_2^2 S_1 S_2^4 S_1^5 = 1\,, \quad S_2 S_1^3 S_2^5 S_1^3 = 1\,.$$

Aus der Theorie der Abelschen Gruppen, von H. Meier-Wunderli, Zürich.

Die bekannten Beweise des Satzes von Hajós benutzen den Gruppenring. Es wurde ein Beweis vorgetragen, der ohne den Gruppenring auskommt. Eine ausführliche Darstellung wird andernorts erscheinen.

Courbure intégrale généralisée et homotopie, par M. Kervaire, Berne.

Le problème suivant est étudié:

Soit M_k une variété plongée dans un espace euclidien R_{k+n} avec un champ F_n de repères normaux à M_k; ce champ induit une application continue φ de M_k dans la variété de Stiefel $V_{k+n,n}$ des suites de n vecteurs (orthonormés et ayant pour origine un point fixe A) dans R_{k+n}: l'application φ fait correspondre à chaque point P de la variété M_k les vecteurs équipollents à ceux du champ F_n au point P et ayant pour origine le point fixe A. Que peut-on dire de la classe c de cette application et en particulier *la classe* c *est-elle indépendante du plongement de* M_k *et du champ* F_n ?

On remarque que les résultats de Stiefel sur les groupes d'homologie (entière) des variétés $V_{k+n,n}$:

$$H_i(V_{k+n,n}) = 0 \text{ pour } 1 \leqq i < k\,, \quad H_k(V_{k+n,n}) = \begin{cases} Z \text{ pour } k \text{ pair ou } n = 1 \\ Z_2 \text{ pour } k \text{ impair et } n > 1, \end{cases}$$

(où Z et Z_2 désignent les groupes des entiers et des restes mod 2 respectivement) permettent de représenter la classe c par un nombre (entier ou reste mod 2) que nous désignerons également par c.

Le problème qui vient d'être posé a été résolu par H. Hopf dans le cas $n = 1$ (les vecteurs de F_n se réduisent alors à la seule normale à M_k dans R_{k+1}) et avec k pair (*Math. Annalen*, 95, 340-67, 1925). Dans ce cas c (appelée *courbure intégrale*) ne dépend que de M_k et vaut $\frac{1}{2}\varkappa(M_k)$ où $\chi(M_k)$ désigne la caractéristique d'Euler de M_k.

Dans le cas général ($n \geqq 1$, k quelconque), on montre que c, la *courbure intégrale généralisée*, ne dépend que de M_k si et seulement si un certain invariant d'homotopie γ des applications $S_{k+n} \longrightarrow S_n$ est identiquement nul (c'est-à-dire a la valeur 0 pour toute application $S_{k+n} \longrightarrow S_n$); en ce cas c est déterminée par la *semi-caractéristique* de M_k égale à $\frac{1}{2}\chi(M_k)$ pour k pair et à

$$\sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(k-1)} (-1)^i p_i(M_k)$$

pour k impair ($p_i(M_k)$ = rang de $H_i(M_k; Z_2)$).

Lorsque k est pair, on a toujours $\gamma = 0$ (quel que soit n); autrement dit: *Pour* k *pair, la courbure intégrale généralisée ne dépend que de* M_k: $c = \frac{1}{2}\chi(M_k)$.

Pour k impair, γ est un reste mod 2 en général non nul. En dehors des cas banals

$\pi_{n+k}(S_n) = 0$ (par exemple pour $n = 1$ ou $k = 5$, $n \geqq 7$),

$\pi_{n+k}(S_n)$ ne contient que des éléments d'ordre impair (par exemple $k = 7$, $n = 2$), pour lesquels γ est évidemment toujours nul,

on peut dire

1° γ n'est pas identiquement nul sur $\pi_{n+k}(S_n)$ avec $n \geqq k + 1$ lorsque S_k est parallélisable; on n'a donc pas de généralisation du théorème de H. Hopf dans le sens ci-dessus pour

$k = 1\ (n \geqq 2)$, $k = 3\ (n \geqq 4)$, $k = 7\ (n \geqq 8)$, ... , ? , ...

2° Si γ est identiquement nul sur $\pi_{N+k}(S_N)$ avec $N \geqq k + 1$, il est identiquement nul sur $\pi_{n+k}(S_n)$ pour tout n;

3° γ est identiquement nul pour $k = 3, 1 \leqq n \leqq 3$ et $k = 7, 1 \leqq n \leqq 7$.

Conjectures:

γ est identiquement nul pour $1 \leqq n \leqq k$;

γ n'est pas identiquement nul pour $n \geqq k + 1$ si et seulement s'il existe un élément de $\pi_{2k+1}(S_{k+1})$ dont l'invariant de Hopf est 1.

Sur les représentations linéaires de certains groupes finis, par G. VINCENT, Lausanne.

La détermination des formes de Clifford de l'espace sphérique se ramène à la recherche des groupes finis admettant des représentations

linéaires telles que la matrice associée à un élément différent de l'identité n'admette pas la valeur propre $+1$. Ces groupes se répartissent en deux catégories. La première contient ceux dont tous les sous-groupes de Sylow sont cycliques; de tels groupes sont résolubles et une condition suffisante, de nature arithmétique, assure l'existence de représentations du type désiré. La deuxième renferme des groupes à p-sous-groupes de Sylow cycliques pour $p \neq 2$ et quaternioniques ($a^{2^{n-1}} = e \quad b^2 = a^{2^{n-2}} \quad bab^{-1} = a^{-1}$) pour $p = 2$. Certains sont résolubles (métabéliens de rang deux, trois ou quatre) les autres pas (parfait ou à premier ou deuxième dérivé parfait). L'objet de cette communication est de montrer qu'une condition suffisante obtenue antérieurement pour une partie des groupes métabéliens de rang deux s'étend, moyennant quelques changements mineurs, à tous les groupes de cette classe.

Sur des ensembles parfaits, par Sophie PICCARD, Neuchâtel.

Soit n un entier quelconque $\geqq 3$ qu'on prend pour base de numération. Soit $K = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ un vrai sous-ensemble de l'ensemble $\{0, 1, ..., n-1\}$, tel que $0 = a_0 < a_1 < ... < a_k \leqq n-1$, soit $A = [a_0, a_1, ..., a_k]_n$ l'ensemble des nombres du segment $\delta = < 0, a_k/n - 1 >$ qui peuvent s'écrire dans le système de numération à base n avec les seuls chiffres de l'ensemble K.

On obtient l'ensemble A à partir du segment δ par la suppression successive d'intervalles contigus de rangs 1, 2, ... définis comme suit. Quel que soit l'entier $m \geqq 1$, si $a_k < n-1$, les intervalles contigus de rang m sont les $(k+1)^{m-1} k$ intervalles (ouverts) de la forme $(0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{m-1} a_i (a_k); 0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{m-1} a_{i+1})$ où $\alpha_j \varepsilon K$, $j = 1, ..., m-1$ et $0 \leqq i \leqq k-1$. Et, si $a_k = n-1$, les intervalles contigus de rang m sont tous les intervalles de la forme $(0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{m-1} \alpha_m; 0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{m-1} \beta_m)$ où $\alpha_j \varepsilon K$, $j = 1, ..., m-1$, $\alpha_m = a_i + 1$ $(0 \leqq i \leqq k-1, \ a_{i+1} - a_i > 1)$, $\beta_m = a_{i+1}$. Appelons intervalle contigu de rang 0 de A l'ensemble des nombres réels qui ne font pas partie de δ. Soit F la famille de tous les ensembles A. Deux ensembles de la famille F: $A = [a_0, a_1, ..., a_k]_n$ et $A' = [a_0', a_1', ..., a_{k'}']_{n'}$ peuvent être confondus sans que l'on ait les égalités $n = n'$, $k = k'$ et $a_j = a_j'$, $j = 1, ..., k$ comme l'avaient remarqué M. Henri Cartan et Mlle Hélène Cartan qui avaient formulé deux critères permettant de résoudre le problème de l'identité de deux ensembles de la famille F. On a la proposition générale suivante: Soient $A = [a_0, a_1, ..., a_k]_n$ et $A' = [a_0', a_1', ..., a_k']_{n'}$ deux ensembles de la famille F, soit $K = \{a_0, a_1, ..., a_k\}$ et soit $K' = \{a_0', a_1', ..., a_{k'}'\}$. Si $A = A'$, il existe deux entiers positifs u et v, tels que $n^u = n'^v$ et que l'ensemble K_1

des entiers de la forme $n^{u-1}\alpha_1 + n^{u-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_u$, où $\alpha_j \varepsilon K$, $j = 1, \ldots, u$, se confond avec l'ensemble K_1' des entiers de la forme $n'^{v-1}\beta_1 + n'^{v-2}\beta_2 + \ldots + \beta_v$, où $\beta_j \varepsilon K_1'$, $j = 1, \ldots, v$.

Montrons que si les deux ensembles A et A' ont les mêmes intervalles contigus de rang 0,1 et 2, on a $A = A'$, $n = n'$, $k = k'$ et $a_i = a_i'$, $i = 1, \ldots, k$. En effet, comme A et A' ont les mêmes intervalles contigus de rang 0, ils sont construits sur le même segment et par suite on a

$$a_k/n - 1 = a'_{k'}/n' - 1 . \tag{1}$$

Deux cas sont à distinguer. Ou bien $a_k < n - 1$ et $a_{k'}' < n' - 1$. Les intervalles contigus de rang 1 de A sont alors

$$\left(\frac{a_i}{n} + \frac{a_k}{n(n-1)} ; \frac{a_{i+1}}{n}\right), 0 \leq i \leq k - 1 ,$$

et les intervalles contigus de rang 1 de A' sont

$$\left(\frac{a'_i}{n'} + \frac{a'_{k'}}{n'(n'-1)} ; \frac{a'_{i+1}}{n'}\right), 0 \leq i \leq k' - 1 .$$

Puisque ces deux groupes d'intervalles sont identiques, on doit avoir

$$k = k' \tag{2}$$

et

$$\frac{a_i}{n} = \frac{a'_i}{n'}, 1 \leq i \leq k . \tag{3}$$

De (2) et (1) il ressort que

$$\frac{a_k}{n-1} = \frac{a'_k}{n'-1}$$

et, d'après (3), on a

$$\frac{a_k}{n} = \frac{a'_k}{n'} .$$

Donc $n = n'$ et, d'après (3), $a_i = a'_i$, $i = 1, 2, \ldots k$.
Supposons maintenant qu'on a l'une au moins des égalités $a_k = n - 1$, $a_{k'}' = n' - 1$. D'après (1), l'un au moins des rapports

$$\frac{a_k}{n-1}, \frac{a'_{k'}}{n'-1}$$

étant, par hypothèse, égal à 1, le second est aussi $= 1$. On a donc $a_k = n - 1$ et $a'_{k'} = n' - 1$. Soient $\delta_{11}, \delta_{12}, \ldots, \delta_{1r}$ les intervalles contigus de rang 1 de A pris dans un ordre tel que δ_{1i} est situé *à gauche* de δ_{1j} si $i < j$. D'après nos prémisses, $\delta_{11}, \delta_{12}, \ldots, \delta_{1r}$ constituent aussi

l'ensemble des intervalles contigus de rang 1 de A'. Il existe donc, d'une part, r indices $t_1, \ldots, t_r$ $(0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_r \leq k - 1)$ et, d'autre part, r indices $s_1, \ldots, s_r$ $(0 \leq s_1 < \ldots < s_r \leq k' - 1)$, tels que

$$\delta_{1i} = \left(\frac{a_{t_i} + 1}{n} ; \frac{a_{t_i+1}}{n}\right) = \left(\frac{a'_{s_i} + 1}{n'} ; \frac{a'_{s_i+1}}{n'}\right), \; a_{t_i+1} - a_{t_i} > 1 \,, \; a'_{s_i+1} - a'_{s_i} > 1 \,, \; 1 \leq i \leq r \,.$$

On doit donc avoir

$$\frac{a_{t_i} + 1}{n} = \frac{a'_{s_i} + 1}{n'} \tag{4}$$

et

$$\frac{a_{t_i+1}}{n} = \frac{a'_{s_i+1}}{n'} \,, \; 1 \leq i \leq r \,. \tag{5}$$

Les intervalles contigus de rang 2 de A sont au nombre de $(k + 1)\, r$ et ce sont les intervalles

$$\delta_{2ij} = \left(\frac{a_j}{n} + \frac{a_{t_i} + 1}{n^2} ; \frac{a_j}{n} + \frac{a_{t_i+1}}{n^2}\right), \; i = 1, 2, \ldots, r, \; j = 0, 1, \ldots, k \,.$$

D'après nos hypothèses, les intervalles contigus de rang 2 de A' doivent aussi être au nombre de $(k + 1)\, r$.

Or, ce nombre est, d'autre part, égal à $(k' + 1)\, r$. Il s'ensuit

$$k = k' \,. \tag{6}$$

Les intervalles contigus de rang 2 de A' sont

$$\left(\frac{a'_j}{n'} + \frac{a'_{s_i} + 1}{n^2} ; \frac{a'_j}{n'} + \frac{a'_{s_i+1}}{n'^2}\right), \; i = 1, 2, \ldots, r; \; j = 0, 1, \ldots, k$$

et par hypothèse ces intervalles se confondent avec les intervalles contigus de rang 2 de A. Comme $a_0 < a_1 < \ldots < a_k$ et que $a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_k$ on doit avoir

$$\delta_{2ij} = \left(\frac{a_j}{n} + \frac{a_{t_i} + 1}{n^2} ; \frac{a_j}{n} + \frac{a_{t_i+1}}{n^2}\right) = \left(\frac{a'_j}{n'} + \frac{a'_{s_i} + 1}{n'^2} ; \frac{a'_j}{n'} + \frac{a'_{s_i+1}}{n'^2}\right),$$

$$i = 1, 2, \ldots, r; \; j = 0, 1, \ldots, k \,. \tag{7}$$

Soit i un entier fixe quelconque compris entre 1 et r. On a, d'après (4) et (5),

$$\frac{a_{t_i+1} - a_{t_i} - 1}{n} = \frac{a'_{s_i+1} - a'_{s_i} - 1}{n'} \tag{8}$$

et, d'après (7), on a

$$\frac{a_j}{n} + \frac{a_{t_i} + 1}{n^2} = \frac{a'_j}{n'} + \frac{a'_{s_i} + 1}{n'^2} \tag{9}$$

et

$$\frac{a_j}{n} + \frac{a_{t_i+1}}{n^2} = \frac{a'_j}{n} + \frac{a'_{s_i+1}}{n^2}, \; j = 0, 1, \ldots, k\,. \tag{10}$$

Attribuons à j une valeur fixe quelconque comprise entre 0 et k et soustrayons membre à membre les deux égalités correspondantes (9) et (10). Il vient

$$\frac{a_{t_i+1} - a_{t_i} - 1}{n^2} = \frac{a'_{s_i+1} - a'_{s_i} - 1}{n'^2}\,. \tag{11}$$

Divisons (8) et (11) membre à membre. Il vient $n = n'$. Donc, d'après (4) et (5), on a $a_{t_i} = a'_{s_i}$ et $a_{t_i+1} = a'_{s_i+1}$.
Et, d'après (9), (10) et (11), on a $a_j = a'_j$, $j = 0, 1, \ldots, k$, *c. q. f. d.*

KORRIGENDA ad Artikel WEINBERGER, Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie.

Auf S. 136, 18. Zeile von oben statt $\alpha - \varkappa$ *richtig* $\varkappa - \alpha$.

Auf Seite 139 ist im ersten Absatze der Satz: „Dass dieses p einen Maximalwert darstellt usf.“ zu *streichen*. Es soll *richtig* heissen: Ob dieses p einen Maximalwert oder einen Minimalwert darstellt, lässt sich nur feststellen, wenn man die zweite Ableitung

$$2f'(p) + pf''(p) \tag{4}$$

bildet, den bereits ermittelten Wert von p, nämlich $-\frac{f(p)}{f'(p)}$ darin einsetzt und prüft, ob die Funktion

$$\frac{2[f'(p)]^2 - f''(p)\,f(p)}{f'(p)} \tag{5}$$

positiv oder negativ ist. $f'(p)$ ist wesentlich negativ (vgl. COURNOT, S. 59, und den Kommentar dazu in der Cournot-Ausgabe von LUTFALLA, Paris, Marcel Rivière & Cie, 1938, S. 207 bis 208).