# II. Le critère d'Ermakof et l'équation fonctionnelle d'Abel.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

pour $\Psi(x) = x + 1$, c'est-à-dire pour le critère de D'ALEMBERT.

Dans la section X nous établissons une classe de fonctions conjuguées pour laquelle le critère B de convergence est au moins aussi sensible que le critère B de convergence pour $\Psi(x) = x^k$ $(k > 1)$. Nous terminons cette communication en présentant dans la section XI quelques observations sur l'énoncé A. Nous y cherchons surtout dans quelle mesure la condition (I, 1) est nécessaire.

## II. Le critère d'Ermakof et l'équation fonctionnelle d'Abel [1].

**Lemme.** — *Soit* $\Psi(x)$ *une fonction de* $x$ *définie pour* $x \geqq a_0$, *continue, possédant une dérivée positive et continue, et telle que l'on ait*

$$\Psi(x) > x \qquad (x \geqq a_0) . \tag{II, 1}$$

*Supposant qu'il existe une solution* $\varphi(x)$ *de l'équation fonctionnelle d'Abel*

$$\varphi(\Psi(x)) = \varphi(x) + 1 \qquad (x \geqq a_0) , \tag{II, 2}$$

*définie, positive et continue pour* $x \geqq a_0$ *et jouissant des propriétés suivantes*:

α) $\varphi(x)$ *tend en croissant vers* $\infty$, *si* $x$ *va de* $a_0$ *à* $\infty$ ;

β) *la dérivée de droite* $\varphi'_+(x)$ *existe pour* $x \geqq a_0$ *et reste positive et bornée de telle sorte qu'à chaque* $A > a$ *correspondent deux constantes positives* $c(A)$ *et* $C(A)$, *telles que*

$$c(A) \leqq \varphi'_+(x) \leqq C(A) \qquad (a_0 \leqq x \leqq A) ; \tag{II, 3}$$

---

[1] Il est remarquable que dans la communication citée, Korkine s'occupe lui aussi de l'équation fonctionnelle d'Abel, mais sans s'apercevoir de la connexion étroite entre cette équation et le critère d'Ermakof, qui n'a été découverte que par Ermakof un an plus tard. La démonstration de Korkine pour le critère B d'Ermakof repose, en notation de la section III, sur l'identité

$$\int_a^{\Psi(a)} \left( \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\Psi_\nu(x))\, \Psi'_\nu(x) \right) dx = \int_a^{\Psi_n(a)} f(x)\, dx$$

et nous paraît d'être particulièrement intéressante, parce qu'elle fait nettement apparaître le lien entre le critère B d'Ermakof et « le principe de condensation » de Cauchy.

γ) *la série*

$$\sum_{\nu \geqq a_0} \varphi'_{+}(\nu) \tag{II, 4}$$

*est divergente;*

δ) *la série*

$$\sum_{\nu \geqq a_0} \frac{\varphi'_{+}(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \tag{II, 5}$$

*est convergente.*

*Alors:*

a) *Soit* f (x) *une fonction positive pour* $x \geqq a_0$, *sommable dans chaque intervalle* $a_0 \leqq x \leqq A$ *et telle que* $1/f(x)$ *est uniformément borné dans chaque intervalle* $a_0 \leqq x \leqq A$. *Si l'on a, à partir d'un* x:

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \geqq 1\,, \tag{II, 6}$$

*la série*

$$\sum_{\nu \geqq a_0} f(\nu) \tag{II, 7}$$

*est divergente.*

b) *Soit* f (x) *une fonction positive pour* $x \geqq a_0$, *sommable dans chaque intervalle* $a_0 \leqq x \leqq A$ *et uniformément bornée dans chaque intervalle* $a_0 \leqq x \leqq A$. *Si l'on a, à partir d'un* x:

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \delta\,, \qquad 0 < \delta < 1\,, \tag{II, 8}$$

*la série* (II, 7) *est convergente.*

*Démonstration.* — On peut supposer sans restreindre la généralité que les relations (II, 6), respectivement (II, 8), sont valables pour $x \leqq a_0$. Posons

$$\Psi_0(x) \equiv x\,, \quad \Psi_1(x) = \Psi(x)\,, \quad \Psi_2(x) = \Psi(\Psi(x))\,, \quad \ldots,$$
$$\Psi_n(x) = \Psi(\Psi_{n-1}(x)) \tag{II, 9}$$

et

$$\Psi_\nu(a_0) = a_\nu\,, \qquad a_0 < a_1 < a_2 < \ldots\,. \tag{II, 10}$$

Alors *la suite* $a_\nu$ *tend vers l'infini.* En effet, si l'on avait

$a_\nu \longrightarrow \alpha < \infty$, il résulterait de la relation $\Psi(a_\nu) = a_{\nu+1}$ pour $\nu \longrightarrow \infty$ :

$$\Psi(\alpha) = \alpha ,$$

ce qui est en contradiction avec (II, 1).

Donc, pour chaque $x > a_0$, il existe un $x^*$ situé dans l'intervalle $a_0 \leqq x^* < a_1$ et un nombre entier $n \geqq 0$ tel que l'on ait

$$x = \Psi_n(x^*) , \quad a_0 \leqq x^* < a_1 . \tag{II, 11}$$

Supposons maintenant que les hypothèses de *a)* soient satisfaites pour $x \geqq a_0$. Soit $c$ la borne inférieure de $\frac{f(x)}{\varphi'_+(x)}$ dans l'intervalle $\langle a_0, a_1 \rangle$, qui est, d'après nos hypothèses, $> 0$, de sorte que l'on ait

$$\frac{f(x)}{\varphi'_+(x)} \geqq c > 0 \quad (a_0 \leqq x < a_1) . \tag{II, 12}$$

Formons le quotient

$$\frac{f(\Psi(x))}{\varphi'_+(\Psi(x))} \Big/ \frac{f(x)}{\varphi'_+(x)} = \frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \Big/ \frac{\varphi'_+(\Psi(x))}{\varphi'_+(x)} . \tag{II, 13}$$

On a en prenant les dérivées de droite des deux membres de (II, 2):

$$\varphi'_+(x) = \varphi'_+(\Psi(x))\, \Psi'(x) . \tag{II, 14}$$

Donc, le quotient (II, 13) devient

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)}$$

et est, en vertu de (II, 6), $\geqq 1$. Il en résulte que si l'on a pour un $x$ quelconque $\frac{f(x)}{\varphi'_+(x)} \geqq c$, on a aussi pour chaque entier $n > 0$

$$\frac{f(\Psi_n(x))}{\varphi'_+(\Psi_n(x))} \geqq c .$$

Or nous avons vu que chaque $x \geqq a_0$ peut être mis sous la forme (II, 11). Il résulte donc de (II, 12) que l'on a

$$\frac{f(x)}{\varphi'_+(x)} \geqq c \qquad (a_0 \leqq x),$$

et (II, 7) est divergente avec (II, 4).

Supposons, d'autre part, que l'hypothèse *b*) soit satisfaite pour $x \geqq a_0$. Posons

$$Q(x) = \frac{f(x)\,\varphi(x)^2}{\varphi'_+(x)} \qquad (x \geqq a_0) \tag{II, 15}$$

et formons le quotient

$$\frac{Q(\Psi(x))}{Q(x)} = \frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi'_+(\Psi(x))} \left(\frac{\varphi(\Psi(x))}{\varphi(x)}\right)^2 . \tag{II, 16}$$

Il résulte de (II, 2) et $\alpha$) que

$$\left(\frac{\varphi(\Psi(x))}{\varphi(x)}\right)^2 = \left(\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)}\right)^2 \longrightarrow 1 \qquad (x \longrightarrow \infty) .$$

On peut donc supposer sans restreindre la généralité que l'on a

$$\left(\frac{\varphi(\Psi_n(x))}{\varphi(x)}\right)^2 \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (x \geqq a_0) . \tag{II, 17}$$

Le second membre de (II, 16) devient en tenant compte de (II, 14), (II, 8) et (II, 17)

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \left(\frac{\varphi(\Psi_n(x))}{\varphi(x)}\right)^2 \leqq 1 .$$

Alors on a évidemment

$$Q(\Psi(x)) \leqq Q(x) \qquad (x \geqq a_0),$$

donc à fortiori pour un entier $n$ positif

$$Q(\Psi_n(x)) \leqq Q(x) \qquad (x \geqq a_0) . \tag{II, 18}$$

Or soit C la borne supérieure de $Q(x)$ dans l'intervalle $\langle a_0, a_1 \rangle$:

$$Q(x) = \frac{f(x)\,\varphi(x)^2}{\varphi'_+(x)} \leqq C \qquad (a_0 \leqq x \leqq a_1) . \tag{II, 19}$$

On peut mettre tout $x \geqq a_1$ sous la forme (II, 11). Donc, en vertu de (II, 18), la relation (II, 19) est aussi valable pour tout $x \geqq a_0$ et l'on a

$$f(x) \leqq C \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} \qquad (x \geqq a_0) \cdot$$

La série (II, 7) est convergente avec (II, 5).

Les assertions *a*) et *b*) sont complètement démontrées.

## III. Construction d'une solution de l'équation d'Abel.

Dans cette section nous allons construire avec Ermakof, pour chaque fonction $\Psi(x)$ satisfaisant aux conditions du lemme de la section II une fonction $\varphi(x)$ jouissant des propriétés exigées dans ce lemme, sauf, pour le moment, les propriétés $\gamma$) et $\delta$).

Désignons l'inverse de la fonction $y = \Psi(x)$ $(x \geqq a_0)$ par

$$x = \psi(y) \qquad (y \geqq a_1 = \Psi(a_0)) \,.$$

La fonction $\psi(y)$ est continue et croissante pour $y \geqq a_1$, et l'on a

$$\psi'(y) = \frac{1}{\Psi'(x)} \qquad (y = \Psi(x) \,, \quad x \geqq a_0 \,, \quad y \geqq a_1) \,. \tag{III, 1}$$

Posons

$$\psi_0(x) = x \,, \quad \psi_1(x) = \psi(x) \,, \quad \psi_2(x) = \psi(\psi(x)) \,, \quad \ldots \,,$$
$$\psi_n(x) = \psi(\psi_{n-1}(x)) \,.$$

Alors $\psi_n(x)$ est l'inverse de la fonction $\Psi_n(x)$ donnée par (II, 9). Donc, en résolvant (II, 11) par rapport à $x^*$, on a

$$x^* = \psi_n(x) \,. \tag{III, 2}$$

La valeur de $x$ donnée par (II, 11) parcourt évidemment l'intervalle

$$a_n \leqq x < a_{n+1} \,, \tag{III, 3}$$

où les $a_\nu$ sont définies par (II, 10).