Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1955)

Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF

Kapitel: IV. Discussion des séries (II, 4) et (II, 5).

Autor: Ostrowski, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31365

IV. Discussion des séries (II, 4) et (II, 5).

Pour assurer la validité des conditions γ) et δ) on doit faire des hypothèses plus restrictives sur la fonction $\Psi'(x)$. Il résulte en tout cas de la condition α), φ'_+ étant continue par morceaux, que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\infty} \varphi'_+(x)\, dx \tag{IV, 1}$$

est divergente et que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\infty} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2}\, dx \tag{IV, 2}$$

converge. Or, le critérium de Maclaurin-Cauchy liant la divergence de la série (II, 4) à la divergence de l'intégrale (IV, 1) et la convergence de la série (II, 5) à l'intégrale (IV, 2) n'est pas valable sans restrictions. On suppose généralement que l'expression sous le signe d'intégral ne croît pas pour x tendant vers l'infini. Or, il résulte des relations (III, 5) et (III, 7) que $\varphi'_+(x)$ ne croît pas si

1° $\psi'(a_1) = \dfrac{1}{\Psi'(a_0)} \leqq 1$

et

2° la fonction $\psi'(x)$ ne croît pas, c'est-à-dire que $\Psi'(x)$ ne décroît pas.

Il suffit donc d'imposer à la fonction $\Psi(x)$ les conditions suivantes pour que $\varphi'_+(x)$ ne croisse dans aucun intervalle au-dessus de a_0:

$$\Psi'(a_0) \geqq 1\,, \qquad \Psi'(x) \leqq \Psi'(y) \qquad (a_0 \leqq x \leqq y)\,. \tag{IV, 4}$$

On peut d'ailleurs remplacer (IV, 4) par la condition suivante, un peu moins restrictive:

Ψ' (x) *ne décroît pas et atteint ou dépasse la valeur* un *pour une valeur* b_0 *de* x.

En effet, on peut alors remplacer a_0 par b_0, de sorte que les conditions (IV, 4) deviennent satisfaites.

On peut, d'autre part, établir les propriétés γ) et δ) en imposant une condition tout à fait différente à $\Psi'(x)$, à savoir que $\Psi'(x)$ *ne croît pas*.

En effet, dans ce cas on a évidemment $\lim\limits_{x\to\infty} \Psi'(x) = \alpha$ où α ne peut être < 1, puisque dans le cas contraire la condition (II, 1) ne saurait être constamment satisfaite. Donc on a $\alpha \geqq 1$, $\Psi'(x) \geqq 1$. On peut supposer $\Psi'(a_0) > 1$, puisque pour $\Psi'(a_0) = 1$ on aurait $\Psi'(x) \equiv 1$, c'est-à-dire un des cas où les conditions (IV, 4) sont satisfaites. On a alors

$$\frac{d}{dx}(\Psi(x) - x) \geqq \alpha - 1 \geqq 0 \, ,$$

de sorte que $\Psi(x) - x$ ne décroît pas. On a donc en particulier

$$a_\nu - a_{\nu-1} \geqq a_1 - a_0 \, .$$

Posons $a_1 - a_0 = \Delta$, $\Psi'(a_0) = \Psi_0$. On a alors

$$a_\nu - a_{\nu-1} \geqq \Delta > 0 \qquad (\nu \geqq 1) \, ,$$

$$\varphi'_-(a_n) = \Psi_0 \varphi'_+(a_n) \qquad (\Psi_0 > 1) \, .$$

Soit $\mu - 1$ le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\Delta}$. Alors pour tout entier ν, chaque intervalle $\langle \nu, \nu + 1 \rangle$ contient μ points a_λ au plus, c'est-à-dire au plus μ points de discontinuité de $\varphi'_+(x)$.

Or, dans notre hypothèse, $\psi'(x)$ ne décroît pas, donc d'après (III, 5) dans un intervalle de continuité $\varphi'_+(x)$ ne décroît pas et se trouve multipliée par $\psi'(a_1) = \frac{1}{\Psi_0} < 1$ à chaque passage par un point de discontinuité a_ν. Il en résulte qu'on a pour chaque entier $\nu \geqq 1$

$$\varphi'_+(\nu) \geqq \Psi_0^{-\mu} \varphi'_+(x) \qquad (\nu \geqq x \geqq \nu - 1) \, , \qquad \text{(IV, 5)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'_+(\nu) \leqq \Psi_0^{\mu} \varphi'_+(x) \, , \\ \varphi(\nu) \geqq \varphi(x) - \mu - 1 \end{array}\right\} \qquad (\nu \leqq x \leqq \nu + 1) \, . \qquad \text{(IV, 6)}$$

La dernière inégalité résulte de ce que, $\varphi'_+(x)$ étant toujours positive, la fonction $\varphi(x)$ croît constamment et accroît d'une unité dans chaque intervalle $\langle a_{\nu-1}, a_\nu \rangle$.

Or, en vertu de (IV, 5), on obtient

$$\varphi'_+(\nu) \geqq \Psi_0'^{-\mu} \int_{\nu-1}^{\nu} \varphi'_+(x)\, dx \,,$$

et la divergence de la série (II, 4) résulte de celle de l'intégrale (IV, 1). D'autre part on a, en vertu de (IV, 6),

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leqq \frac{\Psi_0'^{\mu}\, \varphi'_+(x)}{(\varphi(x) - \mu - 1)^2} \qquad (\nu \leqq x \leqq \nu + 1) \,,$$

dès que $\varphi(x) \geqq 2\mu + 2$, donc

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leqq 4\, \Psi_0'^{\mu} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} \qquad (\nu \leqq x \leqq \nu + 1 \,, \quad \varphi(x) \geqq 2\mu + 2) \,,$$

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leqq 4\, \Psi_0'^{\mu} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2}\, dx \qquad (\varphi(\nu) \geqq 2\mu + 2) \,,$$

et la convergence de la série (II, 5) résulte de celle de l'intégrale (IV, 2).

V. Enoncé du résultat obtenu.

En rassemblant nos résultats nous avons le théorème suivant:

C. *Soit* $\Psi(x)$ *une fonction de* x *continue, possédant une dérivée positive et continue pour* $x \geqq a_0$ *et telle que l'on ait*

$$\Psi(x) > x \qquad (x \geqq a_0) \,.$$

Supposons que $\Psi'(x)$ *satisfait à l'une des deux conditions suivantes: ou bien* $\Psi'(x)$ *ne décroît pas à partir d'un* x *et atteint ou dépasse la valeur* un: *ou bien* $\Psi'(x)$ *ne croît pas à partir d'un* x. *Alors:*

a) *Si* $f(x)$ *est positive à partir d'un* x *et est sommable tandis que* $\frac{1}{f(x)}$ *reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de* $f(x)$ *et si l'on a à partir d'un* x