Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1955)

Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF

Kapitel: IX. Les fonctions conjuguées auxquelles x + 1 est subordonné.

Autor: Ostrowski, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31365

En second lieu, si $1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}$, x^4 sera situé dans l'intervalle $(x_{\nu+1}, x_{\nu+1}^4)$ de sorte qu'on aura

$$f(x^4) = \frac{f(x_{\nu+1})}{\left(8^{(\nu+1)^2} lg\, x_{\nu+1}\right) x^4},$$

donc

$$\frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)} = \frac{4\, f(x_{\nu+1})}{\left(8^{\nu^2+2\nu+1} lg\, x_{\nu+1}\right) x\, f(x)},$$

et, puisqu'on a en tout cas

$$f(x) \geqq \frac{f(x_\nu)}{\left(8^{\nu^2+\nu} lg\, x_\nu\right) x},$$

il vient

$$\frac{f(x^4)\, 4x^3}{f(x)} \leqq \frac{f(x_{\nu+1})\left(8^{\nu^2+\nu} lg\, x_\nu\right) \cdot 4}{\left(8^{\nu^2+2\nu+1} lg\, x_{\nu+1}\right) f(x_\nu)} = \frac{f(x_{\nu+1})\, lg\, x_\nu}{\left(2 \cdot 8^\nu lg\, x_{\nu+1}\right) f(x_\nu)}.$$

Or, on a évidemment pour $\nu \longrightarrow \infty$

$$lg\, x_{\nu+1} \sim 4\, lg\, x_\nu \;, \quad f(x_{\nu+1}) < f(x_\nu),$$

donc

$$\frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty, \;\; 1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}).$$

On a ainsi

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = 0,$$

et le critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée $\Psi_2(x) = x^4$ est applicable à la série $\Sigma f(\nu)$.

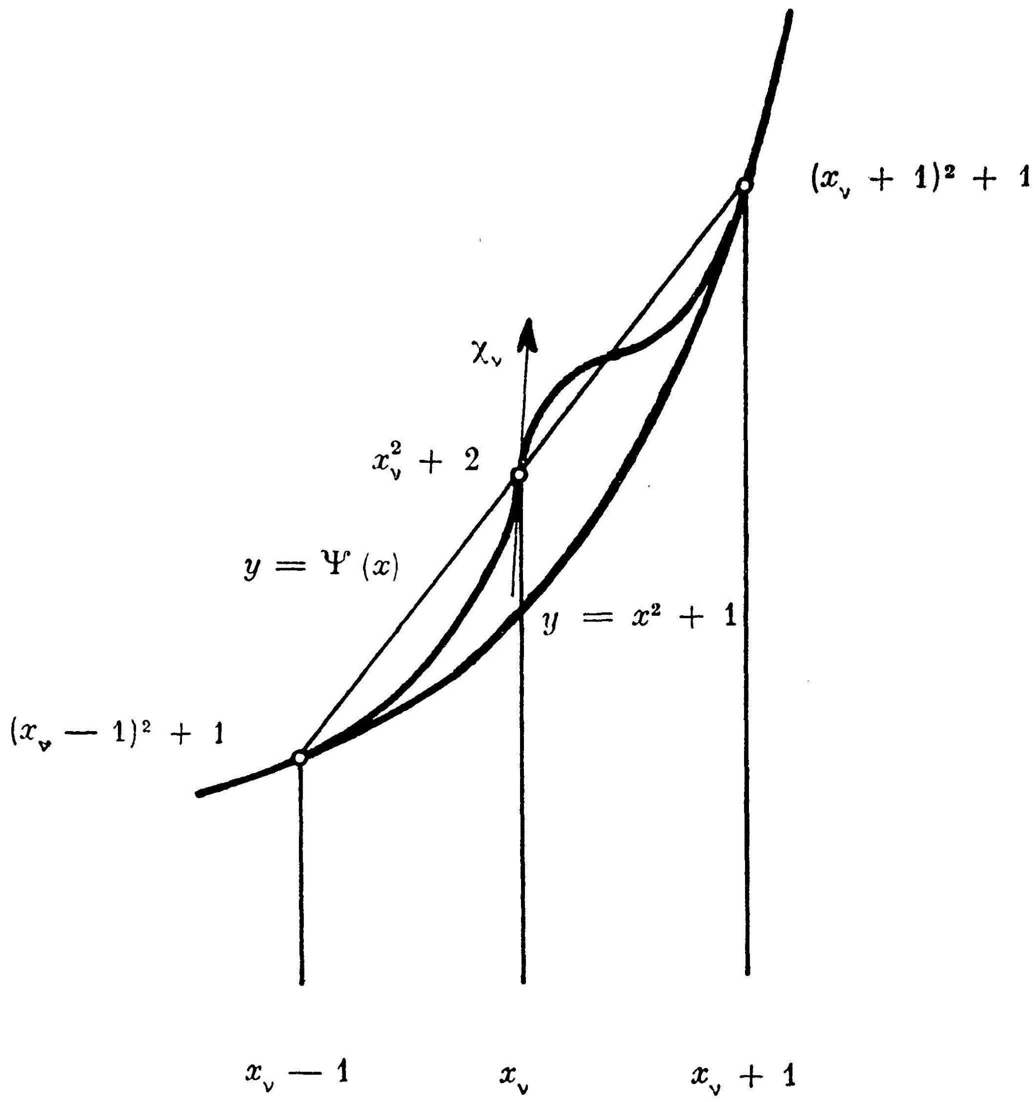
IX. Les fonctions conjuguées auxquelles x + 1 est subordonné.

En second lieu Ermakof donne à l'endroit cité l'énoncé suivant:

« *De deux fonctions conjuguées de première espèce la plus grande est celle qui donne le caractère le plus sensible de convergence ou de divergence.* »

Or cet énoncé est de même inexact. Nous allons construire une fonction conjuguée $\Psi(x)$ qui, pour $x \geqq 3$, est partout $> x^2$, et telle que pour

$$f(x) = \frac{1}{x\,(lg\,x)^2}$$



le critère B de convergence d'Ermakof est applicable avec la fonction conjuguée x^2 et ne l'est pas avec la fonction conjuguée $\Psi(x)$.

A cet effet posons

$$x_\nu = 10\,\nu\,, \quad \chi_\nu = 32\,x_\nu = 320\,\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

et considérons la courbe $y = x^2 + 1$ $(x \geqq 3)$ qui est situé au-dessus de $y = x^2$. Pour obtenir la courbe $y = \Psi(x)$ nous poserons $\Psi(x) = x^2 + 1$ pour $x \geq 3$ *en dehors* de tout intervalle fermé

$\langle x_\nu - 1, 1 + x_\nu \rangle$. Quant aux intervalles $\langle x_\nu - 1, 1 + x_\nu \rangle$ nous y définirons $\Psi(x)$ comme une fonction continue, constamment croissante et douée d'une dérivée continue, telle qu'on ait $\Psi(x) \geqq x^2 + 1$ $(x \geqq 3)$ et

$$\Psi(x_\nu - 1) = (x_\nu - 1)^2 + 1\,, \qquad \Psi(x_\nu + 1) = (x_\nu + 1)^2 + 1\,,$$
$$\Psi'(x_\nu - 1) = 2(x_\nu - 1)\,, \qquad \Psi'(x_\nu + 1) = 2(x_\nu + 1)\,,$$
$$\Psi(x_\nu) = x_\nu^2 + 2\,, \qquad \Psi'(x_\nu) = \chi_\nu\,.$$

On remplace donc l'arc correspondant de la courbe $y = x^2 + 1$ par un arc qui est tangent à $y = x^2 + 1$ aux points $x = x_\nu \pm 1$, qui passe par le point $(x_\nu, 2 + x_\nu^2)$ et y a une tangente à coefficient angulaire χ_ν. On voit immédiatement qu'il est possible de trouver un tel arc en étudiant la figure ci-contre. En effet, pour qu'il soit possible de construire cet arc de $y = \Psi(x)$ situé entre les abscisses $x_\nu - 1$ et $1 + x_\nu$, il suffit que l'arc correspondant de $y = x^2 + 1$ soit convexe d'en bas et que l'on ait

$$\Psi(x_\nu - 1) < \Psi(x_\nu) < \Psi(x_\nu + 1)\,.$$

On a pour notre fonction $f(x)$:

$$\frac{f(x^2)\,2x}{f(x)} = \frac{x(lg\,x)^2 \cdot 2\,x}{x^2\,(lg\,x^2)^2} = \frac{1}{2} < 1 \qquad (x \geqq 3)\,.$$

Donc le critère de convergence B d'Ermakof est satisfait pour la fonction conjuguée x^2. D'autre part, on a

$$\frac{f(\Psi(x_\nu))\,\Psi'(x_\nu)}{f(x_\nu)} = \frac{f(2 + x_\nu^2)\,\chi_\nu}{f(x_\nu)}$$
$$= \frac{x_\nu\,(lg\,x_\nu)^2\,32\,x_\nu}{(2 + x_\nu^2)\left(lg\left(2 + x_\nu^2\right)\right)^2} > \frac{32\,x_\nu^2\,(lg\,x_\nu)^2}{2\,x_\nu^2\left(lg\,x_\nu^4\right)^2} = 1\,,$$

et le critère B de convergence d'Ermakof n'est pas satisfait par la fonction conjuguée $\Psi(x)$.

Toutefois, il est possible d'établir quelques énoncés dans cet ordre d'idées. Nous nous bornerons dans cette discussion au *critère* B *de convergence* et supposerons que $f(x)$ est une fonction *non croissante* de x.

Nous dirons alors qu'une fonction conjuguée $\Psi(x)$ est *subordonnée* à une fonction $\Psi_1(x)$ si, pour une fonction $f(x)$ positive et non croissante, l'inégalité

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} < 1$$

entraîne toujours l'inégalité

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{f(\Psi_1(x))\,\Psi_1'(x)}{f(x)} < 1 \, .$$

La fonction conjuguée la plus simple étant $x + 1$, il est naturel de se demander à quelles fonctions conjuguées $\Psi(x)$ elle est subordonnée. Tout d'abord $x + 1$ est subordonné à $x + \alpha$ ($\alpha > 1$). En effet, puisqu'on a par hypothèse:

$$f(x + \alpha) \leqq f(x + 1)$$

on a évidemment

$$\frac{f(x + \alpha)}{f(x)} \leqq \frac{f(x + 1)}{f(x)} \, .$$

Plus généralement, si pour la fonction conjuguée $\Psi(x)$ on a à partir d'un x:

$$\Psi(x) - x \geqq 1 \, , \quad \overline{\lim_{x \to \infty}} \Psi'(x) \leqq 1 \, ,$$

$x + 1$ est subordonné à $\Psi(x)$. En effet, on a d'après les hypothèses que nous avons faites

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \leqq \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{f(x + 1)}{f(x)} \, .$$

Un autre énoncé relatif à la fonction conjuguée $x + 1$ est le suivant:

$x + 1$ est subordonné à une fonction conjuguée $\Psi(x)$ si l'on a

$$\Psi(x) - x \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty) \, , \quad \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{lg\,\Psi'(x)}{\Psi(x) - x} \leqq 0 \, ,$$

En effet, supposons que l'on ait pour $x \geqq x_0$

$$\frac{f(x + 1)}{f(x)} \leqq q = e^{-\varepsilon} < 1 \, .$$

Alors on a pour tout entier positif n:

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n} .$$

Or, soit $n = [\Psi(x) - x]$. On obtient

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \frac{f(x+n)\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq e^{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) .$$

D'autre part, on a à partir d'un x

$$lg\,\Psi'(x) \leqq \frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x) - x] , \qquad \Psi'(x) \leqq e^{\frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x)-x]} ,$$

donc

$$e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) \leqq e^{-\frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x)-x]} \longrightarrow 0 , \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

X. Les fonctions conjuguées auxquelles x^k est subordonné.

Nous allons maintenant établir une condition suffisante pour que x^k $(k > 1)$ soit subordonné à la fonction conjuguée $\Psi(x)$ pour chaque k:

Si la fonction conjuguée $\Psi(x)$ satisfait aux deux conditions

$$\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\,(lg\,\Psi(x))^{1+\delta}} \longrightarrow 0 , \qquad \frac{lg\,x}{lg\,lg\,\Psi(x)} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty) \qquad (X, 1)$$

pour chaque $\delta > 0$, la fonction conjuguée x^k est subordonnée à $\Psi(x)$ pour chaque $k > 1$.

Démonstration. — On a à partir d'un x

$$\frac{f(x^k)\,k\,x^{k-1}}{f(x)} \leqq q = e^{-\varepsilon} < 1;$$

il en résulte pour chaque entier positif n

$$\frac{f\left(x^{k^n}\right) k^n\, x^{k^n}}{x\,f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n} . \qquad (X, 2)$$

Or, choisissons l'entier n en fonction de x de façon que l'on ait

$$x^{k^{n+1}} > \Psi(x) \geqq x^{k^n} . \qquad (X, 3)$$