

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 1 (1955)
Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF
Kapitel: IX. Les fonctions conjuguées auxquelles $x + 1$ est subordonné.
Autor: Ostrowski, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-31365>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

En second lieu, si $1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}$, x^4 sera situé dans l'intervalle $(x_{\nu+1}, x_{\nu+1}^4)$ de sorte qu'on aura

$$f(x^4) = \frac{f(x_{\nu+1})}{(8^{(\nu+1)^2} \lg x_{\nu+1}) x^4},$$

donc

$$\frac{f(x^4) 4 x^3}{f(x)} = \frac{4 f(x_{\nu+1})}{(8^{\nu^2+2\nu+1} \lg x_{\nu+1}) x f(x)},$$

et, puisqu'on a en tout cas

$$f(x) \geq \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu) x},$$

il vient

$$\frac{f(x^4) 4 x^3}{f(x)} \leq \frac{f(x_{\nu+1}) (8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu) \cdot 4}{(8^{\nu^2+2\nu+1} \lg x_{\nu+1}) f(x_\nu)} = \frac{f(x_{\nu+1}) \lg x_\nu}{(2 \cdot 8^\nu \lg x_{\nu+1}) f(x_\nu)}.$$

Or, on a évidemment pour $\nu \rightarrow \infty$

$$\lg x_{\nu+1} \sim 4 \lg x_\nu, \quad f(x_{\nu+1}) < f(x_\nu),$$

donc

$$\frac{f(x^4) 4 x^3}{f(x)} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty, \quad 1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}).$$

On a ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = 0,$$

et le critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée $\Psi_2(x) = x^4$ est applicable à la série $\Sigma f(\nu)$.

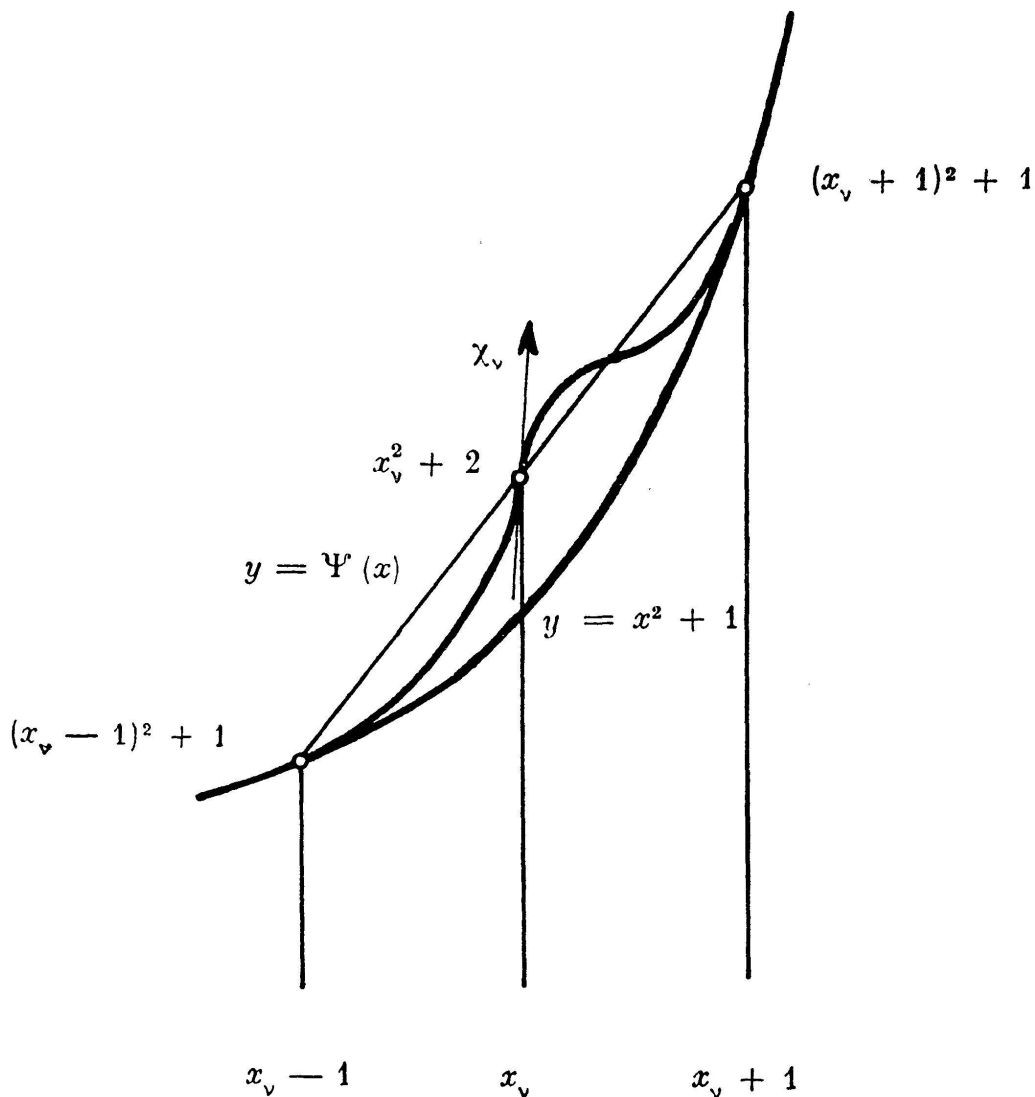
IX. Les fonctions conjuguées auxquelles $x + 1$ est subordonné.

En second lieu Ermakof donne à l'endroit cité l'énoncé suivant:

« De deux fonctions conjuguées de première espèce la plus grande est celle qui donne le caractère le plus sensible de convergence ou de divergence. »

Or cet énoncé est de même inexact. Nous allons construire une fonction conjuguée $\Psi(x)$ qui, pour $x \geq 3$, est partout $> x^2$, et telle que pour

$$f(x) = \frac{1}{x(\lg x)^2}$$



le critère B de convergence d'Ermakof est applicable avec la fonction conjuguée x^2 et ne l'est pas avec la fonction conjuguée $\Psi(x)$.

A cet effet posons

$$x_v = 10 v, \quad \chi_v = 32 x_v = 320 v \quad (v = 1, 2, \dots)$$

et considérons la courbe $y = x^2 + 1$ ($x \geq 3$) qui est situé au-dessus de $y = x^2$. Pour obtenir la courbe $y = \Psi(x)$ nous poserons $\Psi(x) = x^2 + 1$ pour $x \geq 3$ en dehors de tout intervalle fermé

$\langle x_v - 1, 1 + x_v \rangle$. Quant aux intervalles $\langle x_v - 1, 1 + x_v \rangle$ nous y définirons $\Psi(x)$ comme une fonction continue, constamment croissante et douée d'une dérivée continue, telle qu'on ait $\Psi(x) \geq x^2 + 1$ ($x \geq 3$) et

$$\begin{aligned} \Psi(x_v - 1) &= (x_v - 1)^2 + 1, & \Psi(x_v + 1) &= (x_v + 1)^2 + 1, \\ \Psi'(x_v - 1) &= 2(x_v - 1), & \Psi'(x_v + 1) &= 2(x_v + 1), \\ \Psi(x_v) &= x_v^2 + 2, & \Psi'(x_v) &= \chi_v. \end{aligned}$$

On remplace donc l'arc correspondant de la courbe $y = x^2 + 1$ par un arc qui est tangent à $y = x^2 + 1$ aux points $x = x_v \pm 1$, qui passe par le point $(x_v, 2 + x_v^2)$ et y a une tangente à coefficient angulaire χ_v . On voit immédiatement qu'il est possible de trouver un tel arc en étudiant la figure ci-contre. En effet, pour qu'il soit possible de construire cet arc de $y = \Psi(x)$ situé entre les abscisses $x_v - 1$ et $1 + x_v$, il suffit que l'arc correspondant de $y = x^2 + 1$ soit convexe d'en bas et que l'on ait

$$\Psi(x_v - 1) < \Psi(x_v) < \Psi(x_v + 1).$$

On a pour notre fonction $f(x)$:

$$\frac{f(x^2) 2x}{f(x)} = \frac{x (\lg x)^2 \cdot 2x}{x^2 (\lg x^2)^2} = \frac{1}{2} < 1 \quad (x \geq 3).$$

Donc le critère de convergence B d'Ermakof est satisfait pour la fonction conjuguée x^2 . D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(\Psi(x_v)) \Psi'(x_v)}{f(x_v)} &= \frac{f(2 + x_v^2) \chi_v}{f(x_v)} \\ &= \frac{x_v (\lg x_v)^2 32 x_v}{(2 + x_v^2) (\lg(2 + x_v^2))^2} > \frac{32 x_v^2 (\lg x_v)^2}{2 x_v^2 (\lg x_v^4)^2} = 1, \end{aligned}$$

et le critère B de convergence d'Ermakof n'est pas satisfait par la fonction conjuguée $\Psi(x)$.

Toutefois, il est possible d'établir quelques énoncés dans cet ordre d'idées. Nous nous bornerons dans cette discussion au critère B de convergence et supposerons que $f(x)$ est une fonction non croissante de x .

Nous dirons alors qu'une fonction conjuguée $\Psi(x)$ est *subordonnée* à une fonction $\Psi_1(x)$ si, pour une fonction $f(x)$ positive et non croissante, l'inégalité

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} < 1$$

entraîne toujours l'inégalité

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi_1(x)) \Psi_1'(x)}{f(x)} < 1 .$$

La fonction conjuguée la plus simple étant $x + 1$, il est naturel de se demander à quelles fonctions conjuguées $\Psi(x)$ elle est subordonnée. Tout d'abord $x + 1$ est subordonné à $x + \alpha$ ($\alpha > 1$). En effet, puisqu'on a par hypothèse:

$$f(x + \alpha) \leq f(x + 1)$$

on a évidemment

$$\frac{f(x + \alpha)}{f(x)} \leq \frac{f(x + 1)}{f(x)} .$$

Plus généralement, si pour la fonction conjuguée $\Psi(x)$ on a à partir d'un x :

$$\Psi(x) - x \geq 1 , \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \Psi'(x) \leq 1 ,$$

$x + 1$ est subordonné à $\Psi(x)$. En effet, on a d'après les hypothèses que nous avons faites

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x + 1)}{f(x)} .$$

Un autre énoncé relatif à la fonction conjuguée $x + 1$ est le suivant:

$x + 1$ est subordonné à une fonction conjuguée $\Psi(x)$ si l'on a

$$\Psi(x) - x \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty) , \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\lg \Psi'(x)}{\Psi(x) - x} \leq 0 ,$$

En effet, supposons que l'on ait pour $x \geq x_0$

$$\frac{f(x + 1)}{f(x)} \leq q = e^{-\varepsilon} < 1 .$$

Alors on a pour tout entier positif n :

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n}.$$

Or, soit $n = [\Psi(x) - x]$. On obtient

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq \frac{f(x+n) \Psi'(x)}{f(x)} \leq e^\varepsilon e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x).$$

D'autre part, on a à partir d'un x

$$\lg \Psi'(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x) - x], \quad \Psi'(x) \leq e^{\frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x)-x]},$$

donc

$$e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) \leq e^{-\frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x)-x]} \longrightarrow 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

X. Les fonctions conjuguées auxquelles x^k est subordonné.

Nous allons maintenant établir une condition suffisante pour que x^k ($k > 1$) soit subordonné à la fonction conjuguée $\Psi(x)$ pour chaque k :

Si la fonction conjuguée $\Psi(x)$ satisfait aux deux conditions

$$\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x) (\lg \Psi(x))^{1+\delta}} \longrightarrow 0, \quad \frac{\lg x}{\lg \lg \Psi(x)} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty) \quad (\text{X}, 1)$$

pour chaque $\delta > 0$, la fonction conjuguée x^k est subordonnée à $\Psi(x)$ pour chaque $k > 1$.

Démonstration. — On a à partir d'un x

$$\frac{f(x^k) k x^{k-1}}{f(x)} \leq q = e^{-\varepsilon} < 1;$$

il en résulte pour chaque entier positif n

$$\frac{f(x^{kn}) k^n x^{kn}}{x f(x)} \leq e^{-\varepsilon n}. \quad (\text{X}, 2)$$

Or, choisissons l'entier n en fonction de x de façon que l'on ait

$$x^{kn+1} > \Psi(x) \geq x^{kn}. \quad (\text{X}, 3)$$