XI. Quelques observations sur le théorème A.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.09.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$n > \frac{lg \dfrac{lg\, \Psi(x)}{lg\, x}}{lg\, k} - 1\,,$$

donc

$$e^{-\varepsilon n} \leqq e^{\varepsilon} \left(\frac{lg\, \Psi(x)}{lg\, x}\right)^{-\frac{\varepsilon}{lg\, k}},$$

par suite, d'après (X, 8),

$$e^{-\varepsilon n} \leqq e^{\varepsilon} \left(\frac{lg\, x}{lg\, \Psi(x)}\right)^{2\delta}.$$

En introduisant cette borne dans (X, 9) on obtient

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq k\, e^{\varepsilon}\, x^{k}\, \frac{(lg\, x)^{1+2\delta}}{(lg\, \Psi(x))^{\delta}}. \tag{X, 10}$$

Or on a, en vertu de (X, 1) à partir d'un x:

$$\delta\, lg\, lg\, \Psi(x) > (k+1)\, lg x\,, \quad (lg\, \Psi(x))^{\delta} > x^{k+1}\,.$$

L'expression de droite de (X, 10) est donc à partir d'un x

$$\leqq k\, e^{\varepsilon}\, \frac{(lg\, x)^{1+2\delta}}{x}$$

et tend vers 0 avec $x \longrightarrow \infty$. x^k est donc bien subordonné à $\Psi(x)$.

Nos conditions (X, 1) sont par exemple satisfaites pour

$$\Psi(x) = e^{e^{x}}, \quad \Psi(x) = e^{e^{e^{x}}}, \quad \Psi(x) = e^{e^{(lg\, x)^2}}.$$

XI. Quelques observations sur le théorème A.

Nous établirons enfin quelques propositions supplémentaires relatives au critère A d'Ermakof.

α) *Soient* $\Psi(\mathrm{x})$ *et* $\psi(\mathrm{x})$ *deux fonctions positives, continues et dérivables pour* $0 < \mathrm{x}_0 \leqq \mathrm{x} < \infty$ *et telles que l'on ait*

$$\Psi(x) \longrightarrow \infty\,, \quad \psi(x) \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty)$$

et que $\Psi'(\mathrm{x})$ et $\psi'(\mathrm{x})$ *soient positifs et sommables dans tout sous-intervalle fini de* $< x_0, \infty)$. *Soit* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *positif pour* $\mathrm{x} \geqq \mathrm{x}_0$ *et sommable dans tout sous-intervalle fini de* $< \mathrm{x}_0, \infty)$. *Supposons, qu'il existe un* $\mathrm{q}\,(0 < \mathrm{q} < 1)$ *tel que l'on ait*

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \leqq q\, f(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (x \geqq x_0)\,. \tag{XI, 1}$$

Alors on a ou bien pour tout $\mathrm{x} \geqq \mathrm{x}_0$: $\Psi(\mathrm{x}) > \psi(\mathrm{x})$, *ou bien à partir d'un* x: $\Psi(\mathrm{x}) < \psi(\mathrm{x})$, *suivant que l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx \tag{XI, 2}$$

est convergente ou divergente.

Démonstration. — Il résulte de (XI, 1) pour $x_0 \leqq x' \leqq x''$

$$\int_{x'}^{x''} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx \leqq q \int_{x'}^{x''} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx\,,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Psi(x')}^{\Psi(x'')} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x')}^{\psi(x'')} f(x)\,dx\,. \tag{XI, 3}$$

Donc, si (XI, 2) converge:

$$\int_{\Psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx < \int_{\psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx\,;$$

de sorte qu'on a pour chaque $x' \geqq x_0$

$$\Psi(x') > \psi(x')\,.$$

Supposons d'autre part que (XI, 2) soit divergente. Alors nous allons démontrer qu'il est impossible que pour une suite x_ν avec $x_\nu > x_0\,(\nu > 0)$, $x_\nu \longrightarrow \infty$ on ait

$$\Psi(x_\nu) > \psi(x_\nu)\,. \tag{XI, 4}$$

Car on il résulterait de (XI, 4) d'après (XI, 1)

$$\int_{x_0}^{x_\nu} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx \leqq q \int_{x_0}^{x_\nu} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx\,,$$

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x_\nu)} f(x)\,dx\,,$$

donc, d'après (XI, 4):

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \left(\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx + \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx \right)\,,$$

et, puisque $0 < q < 1$,

$$(1-q) \int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,, \quad \int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq \frac{q}{1-q} \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,,$$

et l'intégrale (XI, 2) serait convergente puisque $\Psi(x_\nu)$ tend vers l'infini, C.Q.F.D.

β) *Supposons que dans les hypothèses de la proposition* α) *on ait pour* $x \geqq x_0$

$$x\,f(x) \leqq c\,, \quad \Psi(x) \geqq \gamma\,\psi(x) \quad (x \geqq x_0) \tag{XI, 5}$$

pour une constante positive c *et une constante positive* $\gamma \leqq 1$. *Alors l'intégrale* (XI, 2) *est convergente et l'on a*

$$\Psi(x) > \psi(x) \quad (x \geqq x_0)\,.$$

Démonstration. — On a pour $x \geqq x_0$ comme dans la démonstration de (XI, 3)

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x)\,dx\,. \tag{XI, 6}$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,,$$

$$\int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{\psi(x_0)} f(x)\,dx\,\cdot$$

Donc en introduisant ces expressions dans (XI, 6) et en résolvant l'inégalité obtenue par rapport à $\int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx$:

$$(1-q)\int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx \leqq \int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx - q\int_{x_0}^{\psi(x_0)} f(x)\,dx\,.$$

Ici on a pour la première intégrale de droite d'après (XI, 5):

$$\int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx \leqq \int_{\gamma\psi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt \leqq c \int_{\gamma\psi(x)}^{\psi(x)} \frac{dt}{t} = c\,lg\,\frac{1}{\gamma}\,.$$

Donc l'intégrale $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ reste bornée pour $x \longrightarrow \infty$ et (XI, 2) est convergente.

γ) *Remplaçons dans les hypothèses de la proposition* α) *l'inégalité* (XI, 1) *par*

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \geqq f(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (x \geqq x_0) \tag{XI, 7}$$

et supposons en plus que l'on ait pour un $x_1 \geqq x_0$ *convenablement choisi*

$$\Psi(x_1) > \psi(x_1)\,.$$

Alors l'intégrale (XI, 2) *est divergente.*

Démonstration. — On a pour $x > x_1 \geqq x_0$ d'après (XI, 7)

$$\int_{x_1}^{x} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx = \int_{\Psi(x_1)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \geqq \int_{x_1}^{x} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx = \int_{\psi(x_1)}^{\psi(x)} f(x)\,dx\,,$$

donc

$$\int_{\psi(x)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \geqq \int_{\psi(x_1)}^{\Psi(x_1)} f(x)\,dx\,.$$

Mais alors l'intégrale de gauche serait pour tout $x > x_1$ supérieure à la constante positive

$$\int_{\psi(x_1)}^{\Psi(x_1)} f(x)\,dx$$

et l'intégrale (XI, 2) ne pourrait converger d'après le critère de Bolzano-Cauchy.