

# DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA RELATION $\theta_3^4 = \theta_0^4 + \theta_2^4$ ENTRE LES DIFFÉRENTES FONCTIONS DE JACOBI

Autor(en): **van der Pol, Balth.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **1 (1955)**

Heft 1-2-3: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-31366>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA RELATION

$$\theta_3^4 = \theta_0^4 + \theta_2^4$$

# ENTRE LES DIFFÉRENTES FONCTIONS DE JACOBI

PAR

Balth. VAN DER POL

---

L'objet de cet article est l'équation bien connue qui relie les quatrièmes puissances des trois fonctions  $\theta_0(0, \tau)$ ,  $\theta_2(0, \tau)$  et  $\theta_3(0, \tau)$  de Jacobi définies par

$$\theta_3(0, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2},$$

$$\theta_0(0, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2},$$

$$\theta_2(0, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2},$$

où  $q = e^{i\pi\tau}$  avec  $\text{Im } \tau > 0$ ,  $\tau$  étant le module des fonctions  $\theta$ . Si nous écrivons avec Jacobi

$$\theta_2^2/\theta_3^2 = k \quad \text{et} \quad \theta_0^2/\theta_3^2 = k',$$

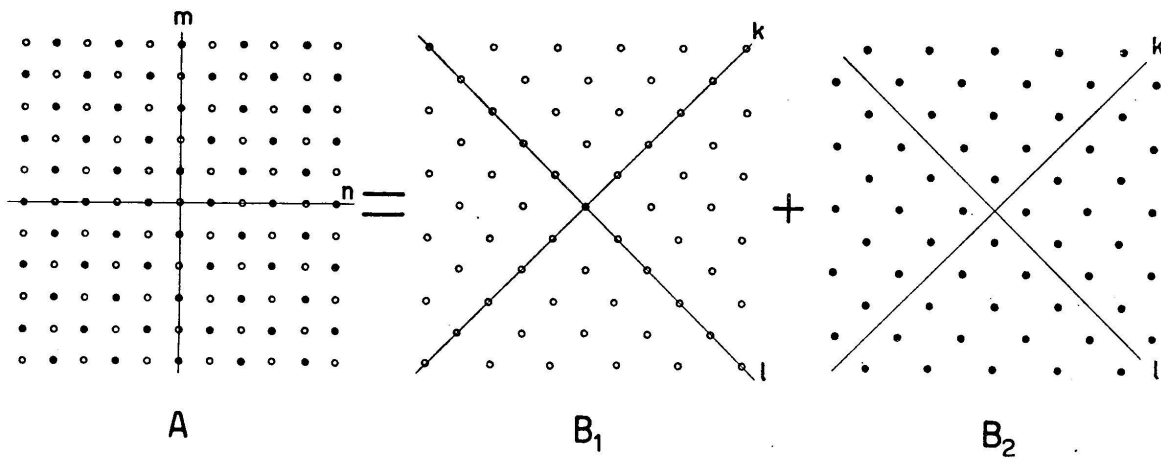
l'équation en question est équivalente à

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Cette relation, qui est fondamentale dans la théorie des fonctions elliptiques est habituellement démontrée au moyen de substitutions modulaires. Il est cependant intéressant de savoir

qu'il est possible d'en donner une démonstration ne faisant aucun appel aux propriétés des fonctions elliptiques.

A cet effet, considérons les sommets de coordonnées  $(m, n)$  du quadrillage infini de la figure,  $m$  et  $n$  prenant toutes les valeurs entières de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Tournons maintenant le système de coordonnées autour de l'origine d'un angle égal à  $\pi/4$ , et appelons  $k$  et  $l$  les nouvelles coordonnées. Ainsi, le réseau A peut être considéré comme une superposition de deux nouveaux réseaux  $B_1$  et  $B_2$ ,  $B_2$  étant décalé par rapport à  $B_1$  dans les deux directions perpendiculaires  $k$  et  $l$  d'une distance égale à un demi-pas des nouveaux systèmes. Les points appartenant au réseau  $B_1$  sont ceux pour lesquels dans le quadrillage original  $(m + n)$  et  $(m - n)$  sont pairs (marqués par un petit cercle). Ceux appartenant au réseau  $B_2$  sont caractérisés par le fait que  $(m + n)$  et  $(m - n)$  sont impairs (marqués par un point).



On a donc pour le réseau  $B_1$

$$m + n = 2l \quad \text{et} \quad m - n = 2k ,$$

c'est-à-dire

$$m = l + k , \quad n = l - k ; \tag{1}$$

tandis que pour  $B_2$

$$m + n = 2l + 1 \quad \text{et} \quad m - n = 2k + l ,$$

c'est-à-dire

$$m = l + k + l , \quad n = l - k . \tag{2}$$

Considérons à présent une fonction  $f(m, n)$  définie sur tous les points du réseau A telle que les sommes de  $f(m, n)$  étendues

sur les réseaux  $B_1$  et  $B_2$  convergent *séparément*. Dans ce cas, on aura, d'après les formules de transformation (1) et (2),

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(m, n) = \sum_{B_1} f(m, n) + \sum_{B_2} f(m, n)$$

c'est-à-dire

$$\sum \sum f(m, n) = \sum \sum f(l+k, l-k) + \sum \sum f(l+k+1, l-k), \quad (3)$$

en omettant d'écrire les limites des sommes qui, par la suite, seront toujours  $-\infty$  et  $+\infty$ .

Cette relation suffit à démontrer l'équation mentionnée de Jacobi.

En effet, d'après la définition de  $\theta_3(0, \tau)$  on a

$$\theta_3^2(0, \tau) = \sum \sum q^{m^2+n^2},$$

et en faisant usage de (3), il vient

$$\sum \sum q^{m^2+n^2} = \sum \sum q^{2(l^2+k^2)} + \sum \sum q^{2\{(l+\frac{1}{2})^2+(k+\frac{1}{2})^2\}},$$

c'est-à-dire

$$\theta_3^2(0, \tau) = \theta_3^2(0, 2\tau) - \theta_2^2(0, 2\tau). \quad (4)$$

En appliquant cette même transformation à

$$\theta_0^2(0, \tau) = \sum \sum (-1)^{n+m} q^{n^2+m^2},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum \sum (-1)^{n+m} q^{n^2+m^2} &= \sum \sum (-1)^{2l} q^{2(l^2+k^2)} + \\ &+ \sum \sum (-1)^{2l+1} q^{2\{(l+\frac{1}{2})^2+(k+\frac{1}{2})^2\}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\theta_0^2(0, \tau) = \theta_3^2(0, 2\tau) - \theta_2^2(0, 2\tau). \quad (5)$$

Enfin, en l'appliquant en dernier lieu à

$$\theta_3(0, \tau) \theta_0(0, \tau) = \sum \sum (-1)^m q^{m^2+n^2},$$

il vient

$$\begin{aligned} \sum \sum (-1)^n q^{m^2+n^2} &= \sum \sum (-1)^{l-k} q^{2(k^2+l^2)} + \\ &+ \sum \sum (-1)^{l+k} q^{2\{(k+\frac{1}{2})^2+(l+\frac{1}{2})^2\}} = \\ &= \left( \sum (-1)^l q^{2l^2} \right)^2 + \left( \sum (-1)^l q^{2(l+\frac{1}{2})^2} \right)^2 . \end{aligned}$$

Or,

$$\sum (-1)^l q^{2(l+\frac{1}{2})^2} = 0 ,$$

car les termes à indices  $l = i$  et  $l = -i - 1$ , ( $i = 0, 1, \dots$ ) se détruisent mutuellement; ainsi

$$\theta_3(0, \tau) \theta_0(0, \tau) = \theta_0^2(0, 2\tau) . \tag{6}$$

En multipliant à présent (4) et (5) membre à membre, on obtient

$$\theta_3^2(0, \tau) \theta_0^2(0, \tau) = \theta_3^4(0, 2\tau) - \theta_2^4(0, 2\tau)$$

qui, d'après (6) se réduit à

$$\theta_0^4(0, 2\tau) = \theta_3^4(0, 2\tau) - \theta_2^4(0, 2\tau) ,$$

ou plus simplement à

$$\theta_3^4 = \theta_0^4 + \theta_2^4 . \tag{7}$$

C'est l'équation mentionnée de Jacobi que l'on peut ainsi établir d'une manière tout à fait élémentaire.

En conclusion, remarquons que la transformation définie par (3) n'est pas applicable seulement aux fonctions  $\theta(0, \tau)$  mais également à bien d'autres fonctions; on obtient, par exemple, pour les fonctions

$$\theta_0(\nu, \tau) , \quad \theta_1(\nu, \tau) , \quad \theta_2(\nu, \tau) \quad \text{et} \quad \theta_3(\nu, \tau)$$

la relation

$$\theta_3^4(\nu, \tau) + \theta_1^4(\nu, \tau) = \theta_0^4(\nu, \tau) + \theta_2^4(\nu, \tau)$$

qui, pour  $\nu = 0$ , se réduit à (7).