

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 2 (1956)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS
Kapitel: Introduction.
Autor: Braconnier, Jean
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32889>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS

Première partie

PAR

Jean BRACONNIER, Lyon

INTRODUCTION.

On sait que l'étude de la représentation des fonctions au moyen de séries trigonométriques ou d'intégrales de Fourier constitue un chapitre essentiel de l'analyse fonctionnelle. Les premiers résultats relatifs à ce qu'on appelle aujourd'hui la transformation de Fourier furent énoncés au début du XIX^e siècle par L. Fourier, S. Poisson, A. Cauchy et P.-L. Dirichlet en vue de résoudre des problèmes soulevés par D. Bernoulli, L. Euler et J. d'Alembert dans leurs travaux sur les solutions des équations différentielles. La période de 1825 à 1925 vit paraître une immense littérature consacrée aux séries et intégrales de Fourier et il ne saurait être question de donner ici des indications bibliographiques à ce sujet; quant aux résultats obtenus, on pourra se reporter aux traités et monographies classiques parmi lesquels on peut citer, sans être exclusif, les ouvrages de A. Zygmund [35]¹, S. Bochner [2] et N. Wiener [34].

L'étude moderne des structures fondamentales de l'analyse qui commençait à se développer vers 1925 se devait d'opérer une synthèse de la théorie ainsi édifiée en reconstruisant l'analyse harmonique à partir de quelques principes généraux, en

¹ Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

élucidant le caractère mystérieux de certains résultats et en établissant entre eux des liens jusqu'alors peu visibles ou inconnus. Les progrès de la théorie des groupes topologiques et les travaux de H. Weyl, L. Pontrjagin et J. von Neumann indiquaient la voie à suivre et, en 1940, dans son magistral traité [33], A. Weil pouvait dire que « les groupes abéliens, localement compacts, forment le domaine naturel de l'analyse harmonique », définir la transformation de Fourier dans ces groupes et démontrer des généralisations du théorème d'inversion de Fourier, du théorème de Parseval-Plancherel et du théorème de Hergoltz-Bochner. Un peu plus tard, I. Gelfand et D. A. Raïkov [10] démontraient les mêmes résultats en suivant une voie un peu différente; enfin, en 1945, des versions probablement définitives et d'ailleurs très proches l'une de l'autre, furent publiées, d'une part, par H. Cartan et R. Godement [7] et par D. A. Raïkov [26], d'autre part. Les monographies et traités publiés depuis ne font que reprendre et compléter les idées fondamentales exposées par les auteurs qu'on vient de nommer; parmi eux, outre les travaux qu'on vient d'indiquer, il faut signaler les articles et monographies de G. W. Mackey [21], M. H. Stone [32] et L. H. Loomis [19]. L'analyse harmonique apparaît alors comme l'étude de la réalisation, au moyen de la transformation de Fourier, de l'algèbre d'un groupe (algèbre qui, à volonté, peut être formée de fonctions, de mesures, voire de distributions, définies dans le groupe) comme une algèbre de fonctions numériques, ou de mesures, définies dans un objet dual du groupe, et qui est en quelque sorte le spectre de son algèbre. Les résultats qu'on obtient ainsi font l'objet du présent article; une partie de ces résultats s'étend, au prix d'assez grandes difficultés, aux groupes non abéliens que nous n'examinerons pas ici.

On s'est efforcé de décrire les résultats avec la plus grande précision, ce qui a conduit parfois à quelque lourdeur, dont le lecteur voudra bien nous excuser. D'autre part, chaque fois que cela a semblé utile, on a donné de brèves indications sur les démonstrations. Enfin, afin de conserver l'aspect concret du sujet, on a volontairement évité l'emploi systématique de la théorie des algèbres normées, qui s'avèrerait indispensable dans un exposé plus dogmatique que celui-ci.

Dans le paragraphe 1, on trouvera un rappel de notions fondamentales, relatives aux mesures et intégrales et aux algèbres normées. Au paragraphe 2, on donne la définition et quelques propriétés de l'intégrale de Haar dans un groupe localement compact G , de l'algèbre de G et des fonctions de type positif dans G , qui permettent de construire les formes positives, continues dans l'algèbre de G . Au paragraphe 3 sont définis les caractères du groupe G , supposé abélien, et ceux de son algèbre. Dans le paragraphe 4, on trouvera la définition de la transformation de Fourier ainsi que ses propriétés fondamentales. Au paragraphe 5 se trouve exposée la théorie de la dualité dans les groupes abéliens et au paragraphe 6 l'essentiel de la théorie spectrale des fonctions mesurables et bornées.

Dans la seconde partie, qui débute avec le paragraphe 7, on trouvera des compléments relatifs à la transformation de Fourier-Laplace et à la théorie spectrale des fonctions continues. Enfin, au paragraphe 8, on expose quelques propriétés fondamentales des représentations des groupes et des rapports étroits qui existent entre ces représentations et la transformation de Fourier. Enfin, cet article est complété d'une bibliographie volontairement limitée aux travaux essentiels cités dans le texte.

§ 1. Préliminaires.

1. Nous allons d'abord rappeler quelques définitions relatives aux intégrales, dont il sera fait un constant usage dans la suite¹. Soit E un espace localement compact. On appelle *support* d'une fonction f à valeurs complexes, définie dans E le plus petit ensemble fermé de E en dehors duquel f s'annule; on désigne par $\mathcal{K}(E)$ l'espace vectoriel sur le corps \mathbf{C} des nombres complexes, que forme, lorsqu'on le munit des opérations usuelles sur les fonctions numériques, l'ensemble des fonctions complexes, définies et continues dans E , dont le support est compact. On

¹ On utilisera ici la théorie de l'intégration telle qu'elle est exposée par N. BOURBAKI [5]; cette théorie est, entre autres, particulièrement adaptée à notre propos. Pour les éléments de topologie générale et de théorie des espaces vectoriels topologiques, on consultera [3] et [4].