

§ 1. Préliminaires.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **2 (1956)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **01.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Dans le paragraphe 1, on trouvera un rappel de notions fondamentales, relatives aux mesures et intégrales et aux algèbres normées. Au paragraphe 2, on donne la définition et quelques propriétés de l'intégrale de Haar dans un groupe localement compact G , de l'algèbre de G et des fonctions de type positif dans G , qui permettent de construire les formes positives, continues dans l'algèbre de G . Au paragraphe 3 sont définis les caractères du groupe G , supposé abélien, et ceux de son algèbre. Dans le paragraphe 4, on trouvera la définition de la transformation de Fourier ainsi que ses propriétés fondamentales. Au paragraphe 5 se trouve exposée la théorie de la dualité dans les groupes abéliens et au paragraphe 6 l'essentiel de la théorie spectrale des fonctions mesurables et bornées.

Dans la seconde partie, qui débute avec le paragraphe 7, on trouvera des compléments relatifs à la transformation de Fourier-Laplace et à la théorie spectrale des fonctions continues. Enfin, au paragraphe 8, on expose quelques propriétés fondamentales des représentations des groupes et des rapports étroits qui existent entre ces représentations et la transformation de Fourier. Enfin, cet article est complété d'une bibliographie volontairement limitée aux travaux essentiels cités dans le texte.

§ 1. Préliminaires.

1. Nous allons d'abord rappeler quelques définitions relatives aux intégrales, dont il sera fait un constant usage dans la suite¹. Soit E un espace localement compact. On appelle *support* d'une fonction f à valeurs complexes, définie dans E le plus petit ensemble fermé de E en dehors duquel f s'annule; on désigne par $\mathcal{K}(E)$ l'espace vectoriel sur le corps \mathbf{C} des nombres complexes, que forme, lorsqu'on le munit des opérations usuelles sur les fonctions numériques, l'ensemble des fonctions complexes, définies et continues dans E , dont le support est compact. On

¹ On utilisera ici la théorie de l'intégration telle qu'elle est exposée par N. BOURBAKI [5]; cette théorie est, entre autres, particulièrement adaptée à notre propos. Pour les éléments de topologie générale et de théorie des espaces vectoriels topologiques, on consultera [3] et [4].

désigne par $\overline{\mathcal{K}(E)}$ l'espace vectoriel formé des fonctions complexes f , continues dans E et nulles à l'infini, c'est-à-dire telles que, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact $K \subset E$ tel que l'on ait $|f(x)| \leq \varepsilon$ si x n'appartient pas à K . $\overline{\mathcal{K}(E)}$ sera toujours muni de la norme $\|f\| = \sup_x |f(x)|$; $\overline{\mathcal{K}(E)}$ est alors un espace de BANACH dans lequel $\mathcal{K}(E)$ est partout dense.

Désignons par $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}(E)$ à valeurs réelles; $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$ est un espace vectoriel sur le corps \mathbf{R} des nombres réels. On appelle *mesure de RADON* dans E une forme linéaire $f \rightarrow \mu(f)$ sur $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$ telle que, pour tout ensemble compact $K \subset E$, il existe un nombre $c_K \geq 0$ tel que l'on ait $|\mu(f)| \leq c_K \|f\|$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$ dont le support est contenu dans K . Une mesure μ est dite positive si $\mu(f) \geq 0$ pour toute fonction $f \geq 0$ de $\mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$; une telle mesure μ se prolonge canoniquement en une forme linéaire sur un espace de fonctions intégrables (pour μ) et ce prolongement possède les propriétés des intégrales usuelles. Une forme linéaire complexe sur $\mathcal{K}(E)$, qui est combinaison linéaire (à coefficients complexes) de mesures de RADON s'appelle une *mesure de RADON complexe*; toutes les mesures considérées dans la suite seront de cette espèce. Si μ est une mesure, on désignera souvent par $\int f(x) d\mu(x)$ ou $\int f d\mu$ sa valeur pour une fonction $f \in \mathcal{K}(E)$ et on désignera par $\mathcal{M}(E)$ l'espace vectoriel formé par les mesures sur E .

Toute forme linéaire μ continue dans l'espace $\mathcal{K}(E)$ muni de la norme $\|f\|$ est évidemment une mesure dans E , mesure qu'on dit *bornée*; μ se prolonge alors par continuité en une forme linéaire continue dans l'espace de BANACH $\overline{\mathcal{K}(E)}$ qui sera encore notée μ . On peut ainsi identifier l'espace $\mathcal{M}^1(E)$ formé des mesures bornées dans E au dual de l'espace $\overline{\mathcal{K}(E)}$, la norme d'une mesure bornée μ étant $\|\mu\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\mu(f)|$.

On appelle *support* d'une mesure μ dans E le plus petit ensemble fermé $F \in E$ tel que $\int f d\mu = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}(E)$ dont le support ne rencontre pas F . Toute mesure à support compact est une forme linéaire continue dans l'espace vectoriel $\mathcal{K}(E)$ lorsqu'on munit cet espace de la topologie de

convergence compacte; comme $\mathcal{K}(E)$ est partout dense dans l'espace $\mathcal{C}(E)$ des fonctions complexes continues dans E , muni de la topologie de convergence compacte, toute mesure dans E dont le support est compact se prolonge par continuité en une forme linéaire continue dans $\mathcal{C}(E)$ et on identifiera l'espace $\mathcal{M}_c(E)$ des mesures à support compact au dual de $\mathcal{C}(E)$. Remarquons enfin qu'une mesure à support compact est évidemment bornée.

Si $x \in E$, on désigne par ε_x la mesure $f \rightarrow f(x)$; son support est le point x ; de plus $x \rightarrow \varepsilon_x$ est un homéomorphisme de E dans chacun des espaces $\mathcal{M}^1(E)$ ou $\mathcal{M}_c(E)$ muni de la topologie faible. La mesure $\sum_{i=1}^n c_i \varepsilon_{x_i}$, où les c_i sont des nombres complexes et les x_i des points de E ($1 \leq i \leq n$), est dite *définie par les masses c_i placées aux points $x_i \in E$* .

2. Nous allons maintenant rappeler quelques définitions moins classiques, relatives aux *algèbres*. Toutes les algèbres que l'on considérera sont des algèbres sur le corps des nombres complexes; une telle algèbre A est un espace vectoriel sur \mathbf{C} , muni d'un produit $(x, y) \rightarrow xy$, associatif et distributif par rapport à l'addition, et tel que $(\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y)$ quels que soient les éléments x et y de A et le nombre complexe λ . Un idéal bilatère \mathfrak{a} de A est dit *régulier* si l'algèbre quotient A/\mathfrak{a} possède une unité. Une représentation f d'une algèbre A dans une algèbre A_1 est une application linéaire de A dans A_1 telle que l'on ait $f(xy) = f(x)f(y)$ quels que soient $x \in A$ et $y \in A$. Une représentation de A sur \mathbf{C} s'appelle un *caractère* de A ; le noyau $\chi^{-1}(0)$ d'un caractère χ de A est un idéal bilatère régulier maximal de A .

On dit que A est une *algèbre involutive* si A est une algèbre pourvue d'une application $x \rightarrow x^*$ de A dans elle-même, appelée *involution*, et telle que $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$, $(xy)^* = y^*x^*$ et $x^{**} = x$ quels que soient les éléments x et y de A et le nombre complexe λ . Une représentation f d'une algèbre involutive A dans une algèbre involutive A_1 est une représentation de l'algèbre A dans l'algèbre A_1 telle que $f(x^*) = f(x)^*$ quel que soit $x \in A$. Un caractère χ d'une algèbre

involutive A est dit *unitaire* si l'on a $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$ pour tout $x \in A$. Une forme linéaire f sur A est dite *positive* si l'on a $f(x^*x) \geq 0$ et $f(x^*) = \overline{f(x)}$ pour tout $x \in A$. Par exemple, si E est un espace localement compact, $\mathcal{K}(E)$, muni des opérations usuelles et de l'involution $f \rightarrow \overline{f}$ est une algèbre involutive; toute mesure positive dans E est une forme linéaire positive dans $\mathcal{K}(E)$; si $x \in E$, la mesure ε_x est un caractère unitaire de $\mathcal{K}(E)$.

On dit qu'une algèbre A est une algèbre *normée* si A est un espace vectoriel normé par une norme $x \rightarrow \|x\|$ telle que $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ quels que soient $x \in A$ et $y \in A$. Toute algèbre normée qui est un corps est isomorphe à \mathbf{C} (théorème de GELFAND-MAZUR¹). Si A est complète et si \mathfrak{a} est un idéal régulier distinct de A , il en est de même de l'adhérence de \mathfrak{a} ; tout idéal régulier maximal de A est ainsi fermé; si de plus A est commutative, le théorème de GELFAND-MAZUR montre que tout idéal régulier maximal est le noyau d'un caractère bien déterminé de A . On appelle *approximation de l'unité* dans A une base de filtre \mathfrak{F} dans A telle que chacun des ensembles de \mathfrak{F} soit formé d'éléments $y \in A$ tels que $\|y\| = 1$ et que l'on ait $\lim_{\mathfrak{F}} xy = x$ pour tout $x \in A$; si A possède une unité e , la base de filtre réduite à $\{e\}$ est évidemment une approximation de l'unité. Si E est un espace localement compact, $\overline{\mathcal{K}(E)}$ muni des opérations usuelles sur les fonctions numériques et de la norme introduite au n° 1 est une algèbre involutive, normée et complète (et évidemment commutative); si K est un ensemble compact de E , les fonctions positives de $\overline{\mathcal{K}(E)}$, égales à 1 dans K et ≤ 1 ailleurs, forment un ensemble B_K ; lorsque K varie, B_K décrit une approximation de l'unité dans $\overline{\mathcal{K}(E)}$; on remarquera que $\overline{\mathcal{K}(E)}$ ne possède d'unité que dans le seul cas où E est compact. Tout caractère continu de $\overline{\mathcal{K}(E)}$ est une mesure de la forme ε_x où $x \in E$; tout idéal régulier maximal de $\overline{\mathcal{K}(E)}$ est donc formé des fonctions qui s'annulent en un point bien déterminé de E . Plus généralement, si F est un ensemble fermé de E , l'ensemble $N(F)$ des fonctions $f \in \overline{\mathcal{K}(E)}$ telles que $f(x) = 0$ si $x \in F$ est un idéal fermé de $\overline{\mathcal{K}(E)}$ (régulier dans le seul cas où F est compact); tout idéal fermé de $\overline{\mathcal{K}(E)}$ est de cette forme. Soit A une algèbre

¹ Cf. par exemple [8], [12] et aussi E. HILLE, Functional analysis and semi-groups, § 22-12, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., XXXI (1948).

commutative normée et σ l'ensemble des caractères continus de A ; σ muni de la topologie faible (du dual de A) est un espace localement compact (et compact si A possède une unité) qu'on appelle le *spectre* de A ; si $x \in A$, $\chi \rightarrow \chi(x)$ est une fonction $\hat{x} \in \overline{\mathcal{K}(\sigma)}$ et $x \rightarrow \hat{x}$ est une représentation continue de A dans l'algèbre normée $\overline{\mathcal{K}(\sigma)}$. Supposons maintenant A complète; on a $\|\hat{x}\| = \sup_x |\chi(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n}$; de plus, le noyau de $x \rightarrow \hat{x}$ est l'intersection des idéaux réguliers maximaux de A ou, comme on dit, le *radical* de A ; on dit que A est *semi-simple* si ce radical se réduit à 0, c'est-à-dire si $x \rightarrow \hat{x}$ est biunivoque, ou si A est séparée par ses caractères. Si E est un espace localement compact, E s'identifie au spectre de $\overline{\mathcal{K}(E)}$ au moyen de $x \rightarrow \varepsilon_x$ et $f \rightarrow \hat{f}$ est simplement l'application identique de $\overline{\mathcal{K}(E)}$ sur lui-même.

On dit enfin qu'une algèbre normée A est une algèbre *involutive normée* si A est munie d'une involution $x \rightarrow x^*$ telle que $\|x^*\| = \|x\|$ pour tout $x \in A$. Si A est une algèbre involutive complète, tout caractère unitaire de A est continu; inversement, si tout caractère continu est unitaire, on dit que A est une algèbre *symétrique*.

Si E est un espace localement compact, $\overline{\mathcal{K}(E)}$, munie de l'involution $f \rightarrow \bar{f}$, est une algèbre symétrique; on remarquera que les formes linéaires positives et continues dans $\overline{\mathcal{K}(E)}$ sont simplement les mesures bornées et positives dans E . Si A est une algèbre symétrique commutative et si σ est son spectre, $x \rightarrow \hat{x}$ est une représentation continue de A sur une sous-algèbre *partout dense* de l'algèbre involutive $\overline{\mathcal{K}(\sigma)}$, d'après le théorème de WEIERSTRASS-STONE¹; si μ est une mesure positive et bornée dans σ , $f(x) = \int \hat{x} d\mu$ est une forme linéaire positive et continue dans A qui satisfait à $|f(x)|^2 \leq \|\mu\| f(x^*x)$; réciproquement, toute forme linéaire positive f dans A qui satisfait à $|f(x)|^2 \leq k f(x^*x)$ pour tout $x \in A$ (condition qui est satisfaite lorsque f est continue et lorsque A possède une approximation de l'unité) est de la forme ci-dessus; mais c'est déjà là faire de l'analyse harmonique, puisque celle-ci n'est autre que l'étude

¹ Cf. [3], § 13, n° 23.

de la transformation de FOURIER $x \rightarrow \hat{x}$ lorsque A est une algèbre de groupe.

Pour de plus amples renseignements sur la théorie des algèbres normées, on pourra consulter le magistral exposé de M. NEUMARK [23] et aussi [8, 11, 14].

§ 2. L'intégrale de Haar et le produit de composition.

Dans tout ce qui suit, on désignera par G un groupe topologique localement compact; la loi de composition de G sera notée multiplicativement et l'élément neutre de G sera désigné par e . Toutes les fonctions définies dans G que l'on considère prennent leurs valeurs dans l'ensemble \mathbf{C} des nombres complexes, sauf mention expresse du contraire.

1. Soit f une fonction définie dans G ; si $s \in G$, la fonction $x \rightarrow f(s^{-1}x)$ s'appelle la *translatée* (à gauche) de f par s et se note $U_s \cdot f$; les éléments $s \in G$ tels que $U_s \cdot f = f$ s'appellent les *périodes* de f et forment un sous-groupe de G , fermé si f est continue; le support de $U_s \cdot f$ est l'image du support de f par $x \rightarrow sx$. Il en résulte que U_s est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{K}(G)$, ce qui permet de faire opérer G dans l'espace des mesures dans G : si $s \in G$ et si μ est une mesure dans G , on désigne par $U_s \cdot \mu$ la mesure ν définie par $\nu(f) = \int f(sx) d\mu(x)$, que l'on appelle la *translatée* (à gauche) de μ par s . On montre qu'il existe une mesure sur G , positive et non nulle, invariante par toutes les translations (à gauche); cette mesure est, en outre, unique à un facteur multiplicatif près et s'appelle la *mesure de HAAR* dans G . On choisit une fois pour toutes cette mesure et on désigne alors par $\int f(x) dx$ sa valeur pour $f \in \mathcal{K}_{\mathbf{R}}(G)$; on a ainsi $\int f(sx) dx = \int f(x) dx$ et $\int f(xs^{-1}) dx = \rho(s) \int f(x) dx$ pour tout $s \in G$, où ρ est une représentation continue de G dans le groupe multiplicatif des nombres réels > 0 , égale à 1 si G est *abélien* ou *compact*. Le support de la mesure de HAAR est G tout entier et on identifiera toujours deux fonctions définies dans G qui sont égales presque partout pour la mesure de HAAR; si deux fonctions continues dans G sont égales presque partout, elles sont égales.