Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 2 (1956)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ANALYSE HARMONIQUE DANS LES GROUPES ABÉLIENS

Kapitel: § 4. La transformation de Fourier.

Autor: Braconnier, Jean

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32889

suivant: *toute fonction* $\varphi \in \mathfrak{P}(G)$ *peut être faiblement approchée (dans* $L^{\infty}(G)$*) par des polynomes trigonométriques à coefficients positifs, coefficients dont la somme est égale à* $\varphi(e)$ [7, 12]; ce résultat se complète d'ailleurs facilement de la façon suivante: toute fonction de $\mathfrak{P}(G)$ peut être approchée uniformément sur tout compact par des polynomes trigonométriques; il en est par suite de même pour toute fonction continue dans G. On verra au paragraphe 4, n° 3, d'importants compléments à ces résultats.

§ 4. La transformation de Fourier.

1. Il est maintenant facile de définir la *transformée de* Fourier d'une fonction $f \in L^1(G)$: c'est la fonction $\hat{f}$ définie dans $\hat{G}$ par la formule $\hat{f}(\hat{x}) = \chi_{\hat{x}}(f)$; autrement dit, on pose

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{<x, \hat{x}>}\, f(x)\, dx\,; \tag{1}$$

$\hat{f}$ est alors une fonction continue et nulle à l'infini dans $\hat{G}$ en vertu de la définition de la topologie de $\hat{G}$ (généralisation du classique théorème de Riemann-Lebesgue). Plus précisément, on voit facilement, d'après la formule (1), que *la transformation de* Fourier $f \to \hat{f}$ *est une représentation continue de l'algèbre involutive normée* $L^1(G)$ *sur une sous-algèbre* $\mathcal{A}(\hat{G})$ *de* $\overline{\mathcal{K}}(\hat{G})$.

Le fait que G est séparé par ses caractères signifie alors que $f \to \hat{f}$ *est biunivoque* (c'est-à-dire que toute fonction intégrable est déterminée par sa transformée de Fourier). La définition (1) montre de plus que les fonctions de $\mathcal{A}(\hat{G})$ séparent $\hat{G}$; le théorème de Weierstrass-Stone prouve alors que $\mathcal{A}(\hat{G})$ *est partout dense dans* $\overline{\mathcal{K}}(\hat{G})$, c'est-à-dire que l'on peut approcher uniformément toute fonction continue, nulle à l'infini, dans $\hat{G}$ par des transformées de Fourier de fonctions de $L^1(G)$.

La définition de la transformation de Fourier s'étend naturellement à $\mathfrak{M}^1(G)$: la *transformée de* Fourier de $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ est la fonction F_{μ} continue et bornée dans $\hat{G}$ définie par

$$F_{\mu}(\hat{x}) = \int \overline{<x, \hat{x}>}\, d\mu(x)\,. \tag{2}$$

On voit encore facilement que $\mu \rightarrow F_\mu$ est une représentation continue F de l'algèbre involutive normée $\mathfrak{M}^1(G)$ sur une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions uniformément continues et bornées dans $\hat{G}$. Si la mesure μ est *positive*, on voit immédiatement que F_μ *est une fonction de type positif*, en sorte que F applique $\mathfrak{M}^1(G)$ dans $\mathfrak{P}(\hat{G})$.

Remarquons enfin que, si $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$ et $\hat{x} \in \hat{G}$, $\mu \star \hat{x}$ est le polynôme trigonométrique $F_\mu(\hat{x})\,\hat{x}$ et que la transformée de Fourier de $U_x \cdot \mu$ est la fonction $\overline{<x, \hat{x}>}\, F_\mu(\hat{x})$ de $\hat{x}$.

On peut naturellement définir par des formules analogues la transformation de Fourier F′ dans le groupe $\hat{G}$ (en fait, la formule que l'on va lire n'est autre que la formule (2) écrite pour $\hat{G}$ lorsqu'on aura pu identifier G au dual de $\hat{G}$): la *transformée de* Fourier de la mesure $\mu' \in \mathfrak{M}^1(\hat{G})$ est la fonction F'_μ continue, bornée et définie dans G par la formule

$$F'_\mu(x) = \int <x, \hat{x}>\, d\mu'(\hat{x}) \tag{3}$$

Comme $f \rightarrow \hat{f}$ est une application linéaire continue de $L^1(G)$ dans $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$, sa transposée est une application linéaire faiblement continue du dual $\mathfrak{M}^1(\hat{G})$ de $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$ dans le dual $L^\infty(G)$ de $L^1(G)$, application qui est liée à F′ par la formule

$$\int \overline{\hat{f}(\hat{x})}\, d\mu'(\hat{x}) = \int \overline{f(x)}\, F'_{\mu'}(x)\, dx. \tag{4}$$

Comme $\mathfrak{A}(\hat{G})$ est dense dans $\overline{\mathcal{K}(\hat{G})}$, ceci montre que F′ est *biunivoque*, et faiblement continue.

Les exemples indiqués au paragraphe 3, n° 1, permettent d'écrire des formules normalisées pour la transformation de Fourier usuelle: la transformée de Fourier d'une fonction f intégrable de période 1 (i.e. appartenant à $L^1(\mathbf{T})$), est la suite de terme général $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x) \exp(-2i\pi nx)\, dx$ ($n \in \mathbf{Z}$) qu'on, appelle suite des *coefficients de* Fourier de f. De même, la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbf{Z})$ est la fonction $\hat{f}(x) = \sum_n f(n) \exp(2i\pi nx)$ de période 1. La transformée de Fourier d'une mesure $\mu \in \mathfrak{M}^1(\mathbf{R}^n)$ est l'intégrale de Fourier $F_\mu(\mathbf{y}) = \int \exp(-2i\pi \mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\, d\mu(\mathbf{x})$.

2. Nous allons maintenant voir les propriétés fondamentales de la transformation de FOURIER. Tout d'abord, il est clair que la transformée de FOURIER d'une mesure positive et bornée dans $\hat{G}$ est une fonction de type positif dans G. Réciproquement, *si* $\varphi \in \mathcal{P}(G)$, *il existe une mesure positive* (unique) $\mu' \in \mathcal{M}^1(\hat{G})$ *telle que*

$$\varphi(x) = \int <x, \hat{x}> d\mu'(\hat{x}) \quad \textit{pour tout } x \in G \tag{5}$$

(théorème de BOCHNER).

Ce résultat a été démontré par G. HERGOLTZ pour $G = \mathbf{Z}$, par S. BOCHNER [2] pour $G = \mathbf{R}^n$ et par A. WEIL [33] pour G quelconque.

Nous pensons qu'il est intéressant de donner quelques indications sur la démonstration de cet important résultat. Si $\varphi \in \mathcal{P}(G)$, on montre, par un artifice dû à D. A. RAÏKOV [25, 26] que $\hat{f} \to \int f(x) \overline{\varphi(x)} dx$ est une forme linéaire positive et continue dans $\mathcal{A}(\hat{G})$; comme $\mathcal{A}(\hat{G})$ est partout dense dans $\mathcal{K}(\hat{G})$, cette forme se prolonge par continuité en une mesure positive $\mu' \in \mathcal{M}^1(\hat{G})$ telle que l'on ait $\int f(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int \hat{f}(\hat{x}) d\mu'(\hat{x})$ pour toute $f \in L^1(G)$; en développant le second membre, on voit que la mesure $\overline{<x, \hat{x}>} d\mu'(\hat{x})$ égale $\overline{\varphi(x)} dx$ d'où le résultat (cf. la fin du n° 2 du paragraphe 1). Signalons aussi une autre démonstration due à H. CARTAN et R. GODEMENT [7]: comme la transformée de FOURIER de la masse 1 au point $\hat{x} \in \hat{G}$ est le caractère $\hat{x}$ de G, l'ensemble convexe et faiblement compact des mesures positives de norme $\leqslant 1$ dans $\hat{G}$ est appliqué biunivoquement, et par suite bicontinûment, sur un ensemble convexe et faiblement compact de $\mathcal{P}(G)$, qui contient 0 et $\hat{G}$; cet ensemble est, d'après le théorème d'approximation cité au paragraphe 3, n° 2, égal à $\mathcal{P}_0(G)$, ce qui entraîne le théorème de BOCHNER.

Remarquons encore que, si μ' est positive, on a $\| \mu' \| = F'_{\mu'}(e)$ de telle sorte que F′ est un homéomorphisme sur $\mathcal{P}(G)$ de l'ensemble des mesures positives et bornées dans $\hat{G}$.

Il résulte du théorème de Bochner que F′ *est une représentation biunivoque et continue de l'algèbre* $\mathcal{M}^1(\hat{G})$ *sur l'algèbre* $\mathcal{V}(G)$. Ceci permet de voir que, si G n'est pas compact, il existe des fonctions uniformément continues et bornées dans G qu'on ne peut pas approcher uniformément par des fonctions de $\mathcal{V}(G)$; c'est par exemple le cas si $G = \mathbf{R}^1$ [1].

[1] Cf. J. DIEUDONNÉ, Sur le produit de composition. *Comp. Math.*, 12, 17-34 (1954).

On peut de plus choisir la mesure de HAAR dans le groupe $\hat{G}$ de façon que toute fonction $f \in \mathfrak{L}^1(G)$ soit de la forme $F'_{\mu'}$ où μ' est la mesure définie par $d\mu'(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}$ dans $\hat{G}$; cela signifie que, la mesure de HAAR étant convenablement choisie dans $\hat{G}$, F *applique* $\mathfrak{L}^1(G)$ *dans* $\mathfrak{L}^1(\hat{G})$ *et que, dans* $\mathfrak{L}^1(\hat{G})$, *l'application réciproque de* F *est* F' ou, en explicitant, que l'on a

$$f(x) = \int \hat{f}(\hat{x}) < x, \hat{x} > d\hat{x} \quad \textit{pour toute } f \in \mathfrak{L}^1(G) \tag{6}$$

(formule d'inversion de FOURIER).

La mesure de HAAR étant ainsi choisie dans $\hat{G}$, F *est de plus une isométrie du sous-espace* $L^1(G) \cap L^2(G)$ *de* $L^2(G)$ *sur* $\mathfrak{L}^2(\hat{G})$, autrement dit, on a

$$\int |f(x)|^2\, dx = \int |\hat{f}(\hat{x})|^2\, d\hat{x} \quad \textit{pour toute } f \in L^1(G) \cap L^2(G) \tag{7}$$

(théorème de PLANCHEREL-WEIL).

Cette isométrie se prolonge par continuité en un isomorphisme de l'espace hilbertien $L^2(G)$ *sur l'espace hilbertien* $L^2(\hat{G})$, *isomorphisme dont le réciproque, ou l'adjoint, est le prolongement à* $L^2(\hat{G})$ *de la restriction de* F' *à* $L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$. Pour $G = \mathbf{T}$, ce résultat est le classique théorème de BESSEL-PARSEVAL-RIESZ; il est dû à M. PLANCHEREL pour $G = \mathbf{R}$ et à A. WEIL [33] pour G quelconque (et indépendamment à M. KREIN [18]). Des démonstrations diverses ont été publiées par H. CARTAN et R. GODEMENT [7] et D. A. RAÏKOV [25, 26]. On peut en déduire la démonstration du théorème d'inversion de FOURIER. Signalons enfin qu'un théorème général sur la représentation des formes linéaires positives dans une algèbre involutive et commutative quelconque (théorème dû à R. GODEMENT [14] et s'inspirant de techniques utilisées par M. NEUMARK [9, 23] et analogues à celles utilisées par D. A. RAÏKOV) permet de démontrer d'un seul coup le théorème de BOCHNER, celui de PLANCHEREL-WEIL et la formule d'inversion de FOURIER (cf. § 8).

Depuis les travaux de L. SCHWARTZ relatifs à la transformation de FOURIER des distributions, le calcul des transformées de FOURIER à l'aide des procédés de sommation (dans le cas de $G = \mathbf{T}$ ou $G = \mathbf{R}$) a perdu la plus grande partie de son intérêt théorique; d'ailleurs lorsque de tels procédés s'avèrent nécessaires, il relèvent de la régularisation par des fonctions convenablement choisies.

3. Nous allons maintenant indiquer un théorème d'approximation (complétant celui du paragraphe 3, nº 2) qui sera généralisé au paragraphe 6, nº 4. Tout d'abord, si $\varphi \in \mathcal{P}(G)$ est la transformée de Fourier d'une mesure $\mu' \in \mathcal{M}^1(\hat{G})$, on appelle *spectre* de φ le support $Sp(\varphi)$ de μ'; $Sp(\varphi)$ est ainsi un ensemble fermé de $\hat{G}$, égal à l'ensemble des caractères de G que l'on peut approcher faiblement dans $L^\infty(G)$ par des combinaisons linéaires de translatées de φ. De plus, l'ensemble des $x \in G$ tels que $<x, \hat{x}> = 1$ pour tout $\hat{x} \in Sp(\varphi)$ est le sous-groupe des périodes de φ.

Si $\varphi \in \mathfrak{P}(G)$, on peut approcher φ faiblement dans $L^\infty(G)$ au moyen de polynômes trigonométriques $\sum_i c_i \hat{x}_i$ tels que $\hat{x}_i \in Sp(\varphi)$ et que les c_i soient des nombres réels positifs de somme inférieure à $\varphi(e)$. Plus généralement, on peut approcher faiblement dans $L^\infty(G)$, et même uniformément sur tout compact, toute fonction de $\mathcal{P}(G)$ au moyen de polynômes trigonométriques formés avec les caractères appartenant à son spectre.

Remarquons enfin que toute fonction de $\mathcal{P}(G)$ peut être approchée uniformément sur tout compact par des fonctions de $\mathcal{P}^1(G)$ et que toute fonction de $\mathfrak{P}(G)$ peut être approchée uniformément sur tout compact par des fonctions de la forme $\tilde{f} \star f$ où $f \in \mathcal{K}(G)$ [7].

4. En utilisant les résultats du nº 2, on montre alors l'important théorème suivant de L. Pontrjagin [14]: *si pour tout* $x \in G$, *on désigne par* x' *le caractère* $\hat{x} \to \overline{<x, \hat{x}>}$ *de* $\hat{G}$, $x \to x'$ *est un isomorphisme du groupe* G *sur le dual du groupe* $\hat{G}$; on identifiera ces deux groupes au moyen de cet isomorphisme (la formule (3) qui définit la transformation de Fourier dans G se réduit à la formule (2) écrite dans le groupe $\hat{G}$). On peut alors préciser les propriétés de F et F' de la manière suivante:

a) F *est une représentation biunivoque et continue de l'algèbre involutive normée* $\mathcal{M}^1(G)$ *sur* $\mathcal{P}(\hat{G})$;

b) *La restriction de* F *à* $\mathcal{V}^1(G)$ *applique* $\mathcal{V}^1(G)$ *sur* $\mathcal{V}^1(\hat{G})$ *et a pour application réciproque la restriction de* F′ *à* $\mathcal{V}^1(\hat{G})$;

c) F *est une isométrie de* $L^2(G) \cap L^1(G)$ *sur* $\mathcal{V}^2(\hat{G})$ *et se prolonge par continuité en un isomorphisme de* $L^2(G)$ *sur* $L^2(\hat{G})$, *dont le réciproque est l'application de* $L^2(\hat{G})$ *sur* $L^2(G)$ *qu'on obtient en prolongeant par continuité la restriction de* F′ *à* $L^2(\hat{G}) \cap L^1(\hat{G})$;

d) F *applique* $L^1(G)$ *sur une sous-algèbre partout dense* $\mathfrak{A}(\hat{G})$ *de* $\mathcal{K}(\hat{G})$ *et on a* $\sup_{\hat{x}} |\hat{f}(x)| = \lim_{n \to +\infty} N_1(\overset{n}{\star} f)^{1/n}$.

$\mathcal{V}(G)$ est donc dense par rapport à $\overline{\mathcal{K}(G)}$, mais en général, si G n'est pas compact, l'adhérence de $\mathcal{V}(G)$ est distincte de $\mathcal{K}(G)$. On obtient ainsi une généralisation des propriétés fondamentales de l'intégrale de Fourier usuelle.

Pour que G *soit compact, il faut et il suffit que* $\hat{G}$ *soit discret.* On choisit alors les mesures de Haar comme il a été dit au paragraphe 2, n° 1. Les résultats précédents peuvent alors s'interpréter comme une extension de la théorie des séries de Fourier:

a) *La transformation de* Fourier *définie par* (2) *est une représentation biunivoque et continue de l'algèbre* $\mathfrak{M}(G)$ *(formée de toutes les mesures sur* G*) sur l'algèbre* $\mathcal{V}(\hat{G})$ *des fonctions de type positif sur* $\hat{G}$;

b) F *applique* $\mathcal{V}(G)$ *sur l'algèbre* $L^1(\hat{G})$ *des fonctions sommables dans* $\hat{G}$ *et l'application réciproque de* F *est la transformation de* Fourier F′ *dans* $\hat{G}$, *transformation qui à* $f' \in L^1(\hat{G})$ *associe la fonction* $x \to \sum_{\hat{x}} \langle x, \hat{x} \rangle f'(\hat{x})$ (la convergence du second membre étant normale); c'est-à-dire que l'on a en particulier

$$f(x) = \sum_{\hat{x}} \langle x, \hat{x} \rangle \hat{f}(\hat{x}) \tag{8}$$

si $f \in \mathcal{V}(G)$ et $\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{\langle x, \hat{x} \rangle} f(x)\, dx$; $\mathcal{V}(G)$ *est partout dense dans* $\mathcal{C}(G)$ *et on peut ainsi approcher uniformément toute fonction continue dans* G *par des polynômes trigonométriques.*

c) *Comme* $L^2(G) \subset L^1(G)$, F *est un isomorphisme de l'espace hilbertien* $L^2(G)$ *sur* $L^2(\hat{G})$; *le réciproque de* F *est le prolongement de* F′ *à* $L^2(\hat{G})$; *c'est l'application qui à* $f' \in L^2(\hat{G})$ *fait correspondre la fonction* $x \rightarrow \sum_{\hat{x}} \langle x, \hat{x} \rangle f'(\hat{x})$, *la convergence ayant lieu cette fois dans* $L^2(\hat{G})$. Ce résultat se précise encore en disant que G est une base orthonormale de $L^2(G)$ et que le développement de $f \in L^2(G)$ suivant cette base est donné par (8).

Signalons pour terminer que l'application des résultats qu'on vient d'indiquer à des groupes moins usuels que $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$ ou $\mathbf{Z}^n$ conduit à d'intéressants résultats dont on ne connaît malheureusement pas d'exposé systématique.

§ 5. La théorie de la dualité.

1. On a vu que le dual de $\hat{G}$ était canoniquement isomorphe à G; on peut alors développer une théorie de la dualité dans les groupes abéliens localement compacts, au moyen de la forme bilinéaire $\langle x, \hat{x} \rangle$ définie dans $G \times \hat{G}$.

Si A est une partie de G, le sous-groupe fermé $A^{\perp}$ de $\hat{G}$ formé des caractères $\hat{x} \in \hat{G}$ tels que $\langle x, \hat{x} \rangle = 1$ si $x \in A$ est dit *orthogonal* à A; on définit de la même manière le sous-groupe fermé $A'^{\perp}$ de G orthogonal à une partie A′ de $\hat{G}$. Si H est un sous-groupe de G, on a $(H^{\perp})^{\perp} = \overline{H}$.

a) *Ainsi* $H \rightarrow H^{\perp}$ *est une application biunivoque, involutive et décroissante de l'ensemble des sous-groupes fermés de* G (ordonné par inclusion) *sur l'ensemble des sous-groupes fermés de* $\hat{G}$, dont la correspondance réciproque est $H' \rightarrow H'^{\perp}$; de plus le sous-groupe orthogonal à l'intersection d'une famille $\mathfrak{F}$ de sous-groupes fermés de G est le sous-groupe de $\hat{G}$ engendré par les orthogonaux des sous-groupes de $\mathfrak{F}$.

b) Si H est un sous-groupe fermé de G, tout caractère $\hat{x} \in H^{\perp}$ définit par passage au quotient modulo H un caractère $\dot{\hat{x}}$ de G/H et $x \rightarrow \dot{\hat{x}}$ *est un isomorphisme de* $H^{\perp}$ *sur le dual de*